10 PROBLEMAS RESUELTOS DE PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES

Desarrollo paso a paso según los criterios de corrección de la Ponencia Universitaria Andaluza

Autoría: D. José Garcés Ávila (Ingeniero Mecánico • Director Academia MJ)

CRITERIOS CLAVE DE CORRECCIÓN DE LA PONENCIA ANDALUZA (PAU)

1. Asignación formal de sucesos: Nombrar sucesos explícitamente (A, B, C...) y variables aleatorias X ~ B(n, p) o X ~ N(μ, σ) antes de escribir números.
2. Independencia vs Incompatibilidad: Independientes si P(A ∩ B) = P(A)·P(B); Incompatibles si P(A ∩ B) = 0. No confundir jamás.
3. Teorema de Bayes: Desarrollar formalmente P(B) en el denominador usando el Teorema de la Probabilidad Total.
4. Tipificación de la Normal: Indicar siempre el cambio de variable Z = (X - μ) / σ y justificar simetrías de la campana de Gauss.
5. Moivre-Laplace y Yates: Comprobar n·p ≥ 5 y n·q ≥ 5, y aplicar obligatoriamente la corrección por continuidad (±0,5).

PROBLEMA 1: Leyes de De Morgan, Sucesos Compuestos e Independencia

Sean A y B dos sucesos tales que P(A) = 0,6, P(B) = 0,4 y P(A■ ∪ B■) = 0,7. a) Calcule P(A ∩ B). b) Justifique si A y B son independientes. c) Calcule P(A \ B) y P(A | B■).

a) Cálculo de P(A ∩ B) mediante De Morgan:
A■ ∪ B■ = (A ∩ B)■ ➔ P(A■ ∪ B■) = 1 - P(A ∩ B) ➔ 0,7 = 1 - P(A ∩ B) ➔ **P(A ∩ B) = 0,30**.

b) Justificación estocástica de independencia:
P(A)·P(B) = 0,60 · 0,40 = 0,24. Como P(A ∩ B) = 0,30 ≠ 0,24, **A y B NO son independientes** (son dependientes).

c) Diferencia de sucesos y probabilidad condicionada:
• P(A \ B) = P(A ∩ B■) = P(A) - P(A ∩ B) = 0,60 - 0,30 = **0,30**.
• P(B■) = 1 - P(B) = 0,60 ➔ P(A | B■) = P(A ∩ B■) / P(B■) = 0,30 / 0,60 = **0,50**.

■■ La Trampa de la Ponencia: Confundir P(A■ ∪ B■) con P(A■ ∩ B■). Usar siempre las identidades de De Morgan: el complementario de la unión es la intersección de complementarios y viceversa.

PROBLEMA 2: Probabilidad Total y Teorema de Bayes en Control de Calidad

Tres máquinas M■, M■ y M■ fabrican el 45%, 35% y 20% de piezas, con tasas de defecto del 2%, 3% y 5% respectivamente. a) Calcule la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa. b) Si resulta defectuosa, calcule la probabilidad de que proceda de M■.

a) Teorema de la Probabilidad Total:
P(D) = P(M■)·P(D|M■) + P(M■)·P(D|M■) + P(M■)·P(D|M■)
P(D) = 0,45·0,02 + 0,35·0,03 + 0,20·0,05 = 0,0090 + 0,0105 + 0,0100 = **0,0295 (2,95%)**.

b) Teorema de Bayes (probabilidad a posteriori):
P(M■ | D) = P(M■ ∩ D) / P(D) = [P(M■)·P(D|M■)] / P(D)
P(M■ | D) = 0,0105 / 0,0295 = 105 / 295 = 21 / 59 ≈ **0,3559 (35,59%)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia: Indicar obligatoriamente la fórmula formal de la Probabilidad Total en el denominador antes de reemplazar los decimales.**

PROBLEMA 3: Tabla de Contingencia y Diagnosis Médica (Sensibilidad y Especificidad)

Una patología afecta al 4% de la población. Un test da positivo en el 95% de enfermos y da falso positivo en el 2% de sanos. a) Probabilidad de dar positivo. b) Si da positivo, probabilidad real de estar enfermo (VPP). c) Si da negativo, probabilidad de estar sano (VPN).

a) Probabilidad de test positivo P(T■):
P(E) = 0,04, P(E■) = 0,96; P(T■|E) = 0,95, P(T■|E■) = 0,02.
P(T■) = P(E)·P(T■|E) + P(E■)·P(T■|E■) = 0,04·0,95 + 0,96·0,02 = 0,0380 + 0,0192 = **0,0572 (5,72%)**.

b) Valor Predictivo Positivo P(E | T■):
P(E | T■) = P(E ∩ T■) / P(T■) = 0,0380 / 0,0572 = 95 / 143 ≈ **0,6643 (66,43%)**.

c) Valor Predictivo Negativo P(E■ | T■):
P(T■) = 1 - 0,0572 = 0,9428 • P(E■ ∩ T■) = 0,96·0,98 = 0,9408 ➔ P(E■ | T■) = 0,9408 / 0,9428 ≈ **0,9979 (99,79%)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia: Explicar el fenómeno de la paradoja del falso positivo: con baja prevalencia basal (4%), un test del 95% deja un tercio de falsos positivos en el total de positivos.**

PROBLEMA 4: Urnas y Extracciones Sucesivas sin Reemplazamiento

Urna A (4R, 6B) y Urna B (7R, 3B). Se tira un dado de 6 caras: si sale 1 o 2 se extraen 2 bolas sin reemplazamiento de A; si sale 3 a 6 se extraen de B. a) Probabilidad de que sean del mismo color. b) Si fueron 2 rojas, ¿probabilidad de haber usado la urna B?

1. Probabilidades de urna: P(A) = 2/6 = 1/3; P(B) = 4/6 = 2/3.

2. Extracciones sin reemplazamiento (10 bolas):
• Urna A: P(RR|A) = (4/10)(3/9) = 12/90 = 2/15; P(BB|A) = (6/10)(5/9) = 30/90 = 5/15 ➔ P(Mismo|A) = 7/15.
• Urna B: P(RR|B) = (7/10)(6/9) = 42/90 = 7/15; P(BB|B) = (3/10)(2/9) = 6/90 = 1/15 ➔ P(Mismo|B) = 8/15.

a) Mismo color: P(M) = (1/3)(7/15) + (2/3)(8/15) = 7/45 + 16/45 = **23/45** ≈ **0,5111 (51,11%)**.

b) Teorema de Bayes para Urna B dado RR:
P(RR) = (1/3)(2/15) + (2/3)(7/15) = 16/45 ➔ P(B|RR) = (14/45) / (16/45) = 14/16 = **7/8 = 0,8750 (87,5%)**.

■■ La Trampa de la Ponencia: Reducir el denominador en la segunda extracción sin reemplazamiento (de 10 a 9) y el numerador del color extraído.

PROBLEMA 5: Distribución Binomial B(n, p) en Exámenes Tipo Test

Un test consta de 8 preguntas independientes con 4 opciones (1 correcta). Un alumno responde al azar. a) Identifique el modelo. b) Probabilidad de 3 aciertos exactos. c) Probabilidad de aprobar (≥ 4 aciertos). d) Probabilidad de al menos 1 acierto.

a) Identificación del modelo: X = 'Aciertos' sigue una Binomial B(n = 8, p = 0,25, q = 0,75).

b) Exactamente 3 aciertos: P(X=3) = C(8,3)·(0,25)³·(0,75)■ = 56·(0,015625)·(0,237305) ≈ **0,2076 (20,76%)**.

c) Aprobar (X ≥ 4): P(X≥4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8).
• P(X=4) = 70·(0,25)■·(0,75)■ ≈ 0,0865 • P(X=5) = 56·(0,25)■·(0,75)³ ≈ 0,0231
• P(X=6) = 28·(0,25)■·(0,75)² ≈ 0,0038 • P(X=7) ≈ 0,00037 • P(X=8) ≈ 0,000015
Suma: **P(X ≥ 4)** ≈ **0,1138 (11,38%)**.

d) Al menos 1 acierto: P(X ≥ 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,75)■ = 1 - 0,1001 = **0,8999 (89,99%)**.

■■ La Trampa de la Ponencia: No olvidar el coeficiente combinatorio C(n, k) = n! / (k!(n-k)!) en cada término. Para 'al menos 1', usar siempre el complementario.

PROBLEMA 6: Distribución Normal N(μ, σ) — Tipificación y Manejo de Tablas

El peso de piezas mecánicas sigue N(μ = 500 g, σ = 20 g). a) Probabilidad de que una pieza pese entre 490 y 530 g. b) Probabilidad de pesar menos de 475 g. c) Si se rechazan piezas con peso > 545 g, ¿cuántas defectuosas se esperan en 2.000 piezas?

a) Tipificación Z = (X - 500)/20:
P(490 ≤ X ≤ 530) = P(-0,5 ≤ Z ≤ 1,5) = Φ(1,5) - Φ(-0,5) = Φ(1,5) - [1 - Φ(0,5)]
P = 0,9332 - (1 - 0,6915) = 0,9332 - 0,3085 = **0,6247 (62,47%)**.

b) P(X < 475): P(Z < (475-500)/20) = P(Z < -1,25) = 1 - Φ(1,25) = 1 - 0,8944 = **0,1056 (10,56%)**.

c) Piezas rechazadas (X > 545 g) en lote de 2.000:
P(X > 545) = P(Z > (545-500)/20) = P(Z > 2,25) = 1 - Φ(2,25) = 1 - 0,9878 = 0,0122 (1,22%).
Esperanza: E = 2.000 · 0,0122 = **24,4 ≈ 24 piezas defectuosas**.

■■ La Trampa de la Ponencia: Las tablas de Selectividad solo dan valores positivos Φ(z) para z ≥ 0. Para z negativo usar obligatoriamente Φ(-z) = 1 - Φ(z).

PROBLEMA 7: Inversión en la Distribución Normal: Hallar Parámetros Desconocidos

La vida de baterías sigue N(μ, σ). El 10% dura menos de 800 días y el 15% dura más de 1.400 días. a) Plantee el sistema de ecuaciones. b) Calcule la media μ y la desviación típica σ.

1. Planteamiento de condiciones:
• P(X < 800) = 0,10 ➔ P(Z < (800-μ)/σ) = 0,10. Como 0,10 < 0,5, z■ es negativo.
1 - Φ(z■) = 0,10 ➔ Φ(z■) = 0,90 ➔ z■ = 1,2816 ➔ **(800 - μ) / σ = -1,2816** (Ec. 1).
• P(X > 1400) = 0,15 ➔ P(X ≤ 1400) = 0,85 ➔ Φ((1400-μ)/σ) = 0,85 ➔ z■ = 1,0364 ➔ **(1400 - μ) / σ = 1,0364** (Ec. 2).

2. Resolución del sistema lineal:
Restando Ec. 2 - Ec. 1: 600 = (1,0364 + 1,2816)·σ = 2,3180·σ ➔ **σ = 600 / 2,3180 ≈ 258,84 días**.
Sustituyendo en Ec. 2: μ = 1400 - 1,0364·(258,84) = 1400 - 268,26 ≈ **1.131,74 días**.

■■ La Trampa de la Ponencia: Poner signo negativo al valor crítico tipificado cuando la probabilidad acumulada a la izquierda es menor que 0,50.

PROBLEMA 8: Aproximación de Binomial por Normal (Moivre-Laplace + Corrección Yates)

Un fármaco tiene tasa de éxito del 70% en una muestra de 400 pacientes. a) Justifique la aproximación a la normal y determine sus parámetros. b) Calcule la probabilidad de que se curen entre 270 y 295 pacientes. c) Probabilidad de que se curen al menos 300.

a) Teorema de Moivre-Laplace: X ~ B(n = 400, p = 0,70).
• n·p = 400·0,70 = 280 ≥ 5 • n·q = 400·0,30 = 120 ≥ 5 ➔ Condición satisfecha.
• Media μ = np = 280; Desviación σ = √(npq) = √(84) ≈ 9,1652 ➔ **Y ~ N(280; 9,1652)**.

b) Entre 270 y 295 curados con corrección de Yates:
P(270 ≤ X ≤ 295) ≈ P(269,5 ≤ Y ≤ 295,5) ➔ z■ = (269,5-280)/9,1652 ≈ -1,15; z■ = (295,5-280)/9,1652 ≈ 1,69.
P = Φ(1,69) - [1 - Φ(1,15)] = 0,9545 - (1 - 0,8749) = 0,9545 - 0,1251 = **0,8294 (82,94%)**.

c) Al menos 300 curados: P(X ≥ 300) ≈ P(Y ≥ 299,5) ➔ z = (299,5-280)/9,1652 ≈ 2,13.
P = 1 - Φ(2,13) = 1 - 0,9834 = **0,0166 (1,66%)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia: Olvidar restar 0,5 al extremo inferior o sumar 0,5 al superior (corrección de Yates al pasar de variable discreta a continua).**

PROBLEMA 9: Problema Mixto PAU: Árbol de Subpoblaciones + Binomial Secundaria

En un instituto el 60% son chicas (30% deportistas federadas) y el 40% son chicos (50% deportistas). a) Probabilidad de ser deportista. b) Si es deportista, probabilidad de ser chica. c) De 5 deportistas elegidos al azar, ¿probabilidad de que exactamente 3 sean chicas?

a) Probabilidad Total: P(D) = P(M)·P(D|M) + P(H)·P(D|H) = 0,60·0,30 + 0,40·0,50 = 0,18 + 0,20 = **0,38 (38%)**.

b) Teorema de Bayes: P(M|D) = P(M ∩ D)/P(D) = 0,18 / 0,38 = 9/19 ≈ **0,4737 (47,37%)**.

c) Submuestra Binomial: Universo restringido a deportistas: p = 9/19 ≈ 0,4737, n = 5.
Y = 'Chicas en muestra de 5 deportistas' ~ B(5, 9/19).
P(Y = 3) = C(5,3)·(9/19)³·(10/19)² = 10·(0,10629)·(0,2770) = **0,2944 (29,44%)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia: En el apartado c), no usar la probabilidad inicial de chicas (0,60), sino la probabilidad condicionada calculada en el apartado b) (9/19).**

PROBLEMA 10: Intervalos Característicos Simétricos y Control de Envasado

El volumen de botellas sigue N(μ = 1.000 ml, σ = 15 ml). a) Halle el intervalo centrado en μ que contiene el 95% de la producción. b) Porcentaje no comercializable si el mínimo legal es 970 ml. c) Desviación típica máxima σ' para que el rechazo sea ≤ 0,1%.

a) Intervalo simétrico al 95%: 1 - α = 0,95 ➔ α/2 = 0,025 ➔ Φ(z) = 0,9750 ➔ z = 1,96.
Semi-ancho: k = 1,96 · 15 = 29,4 ml ➔ **[1.000 - 29,4 ; 1.000 + 29,4] = [970,6 ml ; 1.029,4 ml]**.

b) Porcentaje no comercializable (X < 970 ml):
P(X < 970) = P(Z < (970-1.000)/15) = P(Z < -2,00) = 1 - Φ(2,00) = 1 - 0,9772 = **0,0228 (2,28%)**.

c) Calibración para rechazo ≤ 0,1% (P < 0,001):
P(Z < -30/σ') = 0,001 ➔ Φ(30/σ') = 0,9990 ➔ z ≈ 3,09.
30 / σ' = 3,09 ➔ **σ' ≤ 30 / 3,09 ≈ 9,71 ml**.

■■ La Trampa de la Ponencia: Para intervalos bilaterales dividir el error residual α siempre entre 2 antes de buscar en la tabla.

CONCEPTO PROBABILÍSTICO	FÓRMULA / CONDICIÓN	CRITERIO DE EXAMEN
Leyes de De Morgan	P(A■ ∪ B■) = 1 - P(A ∩ B)	Expresar formalmente complementarios
Independencia Estocástica	P(A ∩ B) = P(A) · P(B)	No confundir con sucesos disjuntos
Teorema de Bayes	P(A■|B) = [P(A■)P(B|A■)] / P(B)	Denominador desarrollado por Prob. Total
Binomial B(n, p)	P(X=k) = C(n,k) p■ (1-p)■■■	Ensayos independientes, p constante
Tipificación Normal	Z = (X - μ) / σ ~ N(0, 1)	Usar simetría para valores negativos
Moivre-Laplace + Yates	Y ~ N(np, √(npq)) ± 0,5	Obligatorio comprobar np ≥ 5 y nq ≥ 5

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA Y CRITERIOS OFICIALES: D. JOSÉ GARCÉS ÁVILA
Ingeniero Mecánico • Director Pedagógico de Academia MJ.
Preparación presencial de grupos reducidos en Santa Fe (Granada) e intensivos PAU Andalucía.
Canal Oficial de WhatsApp: +34 679 71 06 64 • Web: academia-santafe.es