SELECTIVIDAD PAU ANDALUCÍA • MATEMÁTICAS II

10 Problemas Estrella Resueltos: Geometría en el Espacio

Vectores, Rectas, Planos, Posiciones Relativas, Distancias Mínimas, Ángulos, Áreas y Volúmenes con Desarrollos Oficiales

PROTOCOLO CLAVE PONENCIA ANDALUZA:
• **Posición Relativa de Rectas:** rg(u, v) = 1 (paralelas o coincidentes) ; rg(u, v) = 2 con [u, v, AB] = 0 (secantes) ; [u, v, AB] ≠ 0 (se cruzan).
• **Distancia entre Rectas Cruzadas:** d(r, s) = |[u, v, AB]| / |u × v| (Volumen paralelepípedo / Área base).
• **Ángulo Recta-Plano:** sen(β) = |v · n| / (|v| |n|) (¡Usa SENO, no coseno!).
• **Métrica:** Área Triángulo = (1/2)|AB × AC| • Volumen Tetraedro = (1/6)|[AB, AC, AD]| • Altura = 3V / Área base.

PROBLEMA 1: DETERMINACIÓN DE PLANOS Y RECTAS ORTOGONALES

Enunciado Oficial: *Dados P(1, -2, 3) y r ≡ { x - y + 2z = 1 ; 2x + y - z = 2 }. a) Halle las paramétricas de r. b) Halle el plano π por P perpendicular a r. c) Calcule la intersección r ∩ π.*

a) Ecuaciones paramétricas de r:
Vector director: v_r = n■ × n■ = (1,-1,2) × (2,1,-1) = **(-1, 5, 3)**.
Punto de r (haciendo z=0): { x - y = 1 ; 2x + y = 2 } ➔ 3x = 3 ➔ x = 1, y = 0 ➔ A(1, 0, 0).
Paramétricas: **x = 1 - λ, y = 5λ, z = 3λ** (λ ∈ ■).

b) Plano π ⊥ r por P(1, -2, 3):
El vector director de r sirve como vector normal del plano: n_π = v_r = (-1, 5, 3).
-1(x - 1) + 5(y + 2) + 3(z - 3) = 0 ➔ -x + 1 + 5y + 10 + 3z - 9 = 0 ➔ **x - 5y - 3z - 2 = 0**.

c) Intersección M = r ∩ π:
Sustituimos las paramétricas de r en π: (1 - λ) - 5(5λ) - 3(3λ) - 2 = 0 ➔ -35λ - 1 = 0 ➔ λ **= -1/35**.
Sustituyendo en r: **M(36/35, -1/7, -3/35)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Al exigir π ⊥ r, el vector director de la recta ES el vector normal del plano (n_π ■ v_r). Confundirlo con producto escalar nulo causa la anulación del ejercicio.

PROBLEMA 2: POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS CON PARÁMETRO M

Enunciado Oficial: *Sean $r \equiv (x-1)/2 = (y+1)/m = z/1$ y $s \equiv \{ x = 2+\lambda ; y = 1-\lambda ; z = m\lambda \}$. a) Estudie la posición según m. b) Para m = 1 halle el punto de corte.*

a) Estudio matricial y producto mixto:
r: A(1, -1, 0), u = (2, m, 1) • s: B(2, 1, 0), v = (1, -1, m) • AB = (1, 2, 0).
Producto mixto [u, v, AB] = |(2, m, 1), (1, -1, m), (1, 2, 0)| = **$m^2 - 4m + 3$** = (m - 1)(m - 3).
• **$m \neq 1$ y $m \neq 3$:** [u, v, AB] ≠ 0 ➔ rg(u, v, AB) = 3 ➔ **Las rectas se cruzan**.
• **m = 1:** [u, v, AB] = 0 y directores no paralelos (2,1,1) ≠ k(1,-1,1) ➔ **Rectas secantes**.
• **m = 3:** [u, v, AB] = 0 y directores no paralelos (2,3,1) ≠ k(1,-1,3) ➔ **Rectas secantes**.

b) Punto de corte para m = 1:
r: { x = 1+2μ, y = -1+μ, z = μ } vs s: { x = 2+λ, y = 1-λ, z = λ }.
Igualando z: μ = λ. Igualando y: -1 + λ = 1 - λ ➔ 2λ = 2 ➔ **λ = 1,** **μ = 1**.
Comprobación en x: 1 + 2(1) = 2 + (1) = 3 (Verifica). **Punto de corte: P(3, 0, 1)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Usar obligatoriamente parámetros distintos (μ y λ) para cada recta al calcular la intersección. Usar λ en ambas falsea el sistema algebraico.

PROBLEMA 3: POSICIÓN RELATIVA DE RECTA Y PLANO CON PARÁMETRO A

Enunciado Oficial: *Sean $\pi \equiv a\,x + 2y + z = 4$ y $r \equiv (x-1)/1 = (y+2)/(-1) = z/2$. a) Estudie la posición según a. b) Para a = 2 halle el corte. c) Para a = 0 halle d(r, π).*

a) Discusión analítica:
Vector director de r: v = (1, -1, 2). Normal de π: n = (a, 2, 1). Punto de r: A(1, -2, 0).
Producto escalar: v · n = (1)(a) + (-1)(2) + (2)(1) = a - 2 + 2 = **a**.
• **$a \neq 0$:** v · n ≠ 0 ➔ **Recta y plano secantes** (se cortan en un punto).
• **a = 0:** v · n = 0 ➔ r ■ π o r ⊂ π. Comprobamos A en π: 0(1) + 2(-2) + 0 = -4 ≠ 4 ➔ **r estrictamente paralela a** π.

b) Punto de corte para a = 2 ($\pi \equiv 2x + 2y + z = 4$):
r: x = 1+λ, y = -2-λ, z = 2λ. En π: 2(1+λ) + 2(-2-λ) + 2λ = 4 ➔ 2λ - 2 = 4 ➔ **λ = 3**.
Sustituyendo: **P(4, -5, 6)**.

c) Distancia para a = 0 (r ■ $\pi \equiv 2y + z - 4 = 0$):
d(r, π) = d(A(1, -2, 0), π) = |2(-2) + 0 - 4| / √($0^2 + 2^2 + 1^2$) = 8 / √5 = **$(8\sqrt{5})/5$ u** ≈ **3,578 u**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** v · n = 0 indica paralelismo de la recta con el plano (pues n es perpendicular al plano), no perpendicularidad.

PROBLEMA 4: DISTANCIA PUNTO-PLANO Y PLANOS PARALELOS EQUIDISTANTES

Enunciado Oficial: *Dados P(2, -1, 3) y $\pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$: a) Calcule d(P, π). b) Halle los planos paralelos a π a distancia d = 4.*

a) Distancia del punto P al plano π:
Fórmula canónica: $d(P, \pi) = |A x_0 + B y_0 + C z_0 + D| / \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$.
$d(P, \pi) = |2(2) - (-1) + 2(3) - 3| / \sqrt{(2^2 + (-1)^2 + 2^2)} = |4 + 1 + 6 - 3| / \sqrt{9} = 8 / 3 =$ **8/3 u** $\approx$ **2,667 u**.

b) Planos paralelos a π a distancia d = 4:
Planos paralelos: $\pi_k \equiv 2x - y + 2z + k = 0$.
Distancia entre planos: $d(\pi, \pi_k) = |k - (-3)| / 3 = |k + 3| / 3 = 4 \rightarrow$ **$|k + 3| = 12$**.
• Caso 1: $k + 3 = 12 \rightarrow$ **$k = 9 \rightarrow \pi_0 \equiv 2x - y + 2z + 9 = 0$**.
• Caso 2: $k + 3 = -12 \rightarrow$ **$k = -15 \rightarrow \pi_0 \equiv 2x - y + 2z - 15 = 0$**.

La Trampa de la Ponencia: Olvidar el valor absoluto en |k+3| = 12. Existen dos soluciones simétricas a ambos lados del plano. Omitir una descuenta la mitad de la nota.

PROBLEMA 5: DISTANCIA DE PUNTO A RECTA Y PROYECCIÓN ORTOGONAL

Enunciado Oficial: *Dados P(1, 0, 2) y $r \equiv \{ x = 2 - \lambda ; y = 1 + 2\lambda ; z = 3\lambda \}$. a) Halle la proyección ortogonal P' de P sobre r. b) Calcule d(P, r) por producto vectorial.*

a) Proyección ortogonal P' sobre r:
Plano perpendicular a r por P: $n_\pi = v_r = (-1, 2, 3)$.
$-1(x - 1) + 2(y - 0) + 3(z - 2) = 0 \rightarrow$ **$-x + 2y + 3z - 5 = 0$**.
Corte con r: $-(2 - \lambda) + 2(1 + 2\lambda) + 3(3\lambda) - 5 = 0 \rightarrow 14\lambda - 5 = 0 \rightarrow$ **$\lambda = 5/14$**.
Sustituyendo en r: **P'(23/14, 12/7, 15/14)**.

b) Distancia mediante producto vectorial:
Punto $A(2, 1, 0) \in r$, $v_r = (-1, 2, 3)$, $AP = P - A = (-1, -1, 2)$.
$v_r \times AP = |(i, j, k), (-1, 2, 3), (-1, -1, 2)| = (7, -1, 3)$.
$|v_r \times AP| = \sqrt{(49 + 1 + 9)} = \sqrt{59}$ • $|v_r| = \sqrt{(1 + 4 + 9)} = \sqrt{14}$.
$d(P, r) = |v_r \times AP| / |v_r| = \sqrt{59} / \sqrt{14} =$ **$\sqrt{826} / 14$ u** $\approx$ **2,053 u**.

La Trampa de la Ponencia: En la fórmula del producto vectorial, dividir entre el módulo del vector director $|v_r|$ (base del paralelogramo), no entre |AP|.

PROBLEMA 6: DISTANCIA MÍNIMA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Enunciado Oficial: *Sean $r \equiv \{ x = 1+2\lambda ; y = -1 ; z = 2+\lambda \}$ y $s \equiv x/1 = (y-2)/1 = (z+1)/(-1)$. a) Demuestre que se cruzan. b) Calcule la distancia mínima d(r, s).*

a) Demostración de cruce de rectas:
r: A(1, -1, 2), u = (2, 0, 1) • s: B(0, 2, -1), v = (1, 1, -1) • AB = (-1, 3, -3).
Producto mixto [u, v, AB] = |(2, 0, 1), (1, 1, -1), (-1, 3, -3)| = 2(0) + 1(4) = **4** ≠ **0**.
Como rg(u, v) = 2 y rg(u, v, AB) = 3, los vectores son L.I.: **las rectas se cruzan en el espacio**.

b) Cálculo de la distancia mínima:
Producto vectorial: u × v = |(i, j, k), (2, 0, 1), (1, 1, -1)| = (-1, 3, 2).
Módulo: |u × v| = √(1 + 9 + 4) = √14.
d(r, s) = |[u, v, AB]| / |u × v| = |4| / √14 = **(2√14)/7 u** ≈ **1,069 u**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** El numerador es el volumen del paralelepípedo (en valor absoluto) y el denominador el área de la base (|u × v|). No olvidar el valor absoluto.

PROBLEMA 7: RECTA PERPENDICULAR COMÚN A DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Enunciado Oficial: *Para las rectas del Problema 6, halle los puntos $P \in r$ y $Q \in s$ de mínima distancia y la ecuación de la perpendicular común t.*

Puntos genéricos y condiciones de ortogonalidad:
P(1 + 2λ, -1, 2 + λ) ∈ r, Q(μ, 2 + μ, -1 - μ) ∈ s.
Vector PQ = (μ - 1 - 2λ, 3 + μ, -3 - μ - λ).
1. PQ · u = 0 ➔ 2(μ - 1 - 2λ) + 1(-3 - μ - λ) = 0 ➔ μ **- 5**λ **= 5**.
2. PQ · v = 0 ➔ 1(μ - 1 - 2λ) + 1(3 + μ) - 1(-3 - μ - λ) = 0 ➔ **3**μ **-** λ **= -5**.
Resolviendo: μ = 5 + 5λ ➔ 3(5 + 5λ) - λ = -5 ➔ 14λ = -20 ➔ λ **= -10/7,** μ **= -15/7**.

Coordenadas de los puntos y recta común t:
• P(1 + 2(-10/7), -1, 2 - 10/7) = **P(-13/7, -1, 4/7)**.
• Q(-15/7, 2 - 15/7, -1 + 15/7) = **Q(-15/7, -1/7, 8/7)**.
Director v_t = PQ = (-2/7, 6/7, 4/7) ■ **(-1, 3, 2)**.
Recta común: **t** ≡ **(x + 13/7)/(-1) = (y + 1)/3 = (z - 4/7)/2**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** El método de puntos genéricos es el más limpio y valorado. Verificar siempre que |PQ| coincide exactamente con la distancia calculada en el Problema 6.

PROBLEMA 8: PUNTOS SIMÉTRICOS RESPECTO A PLANO Y RESPECTO A RECTA

Enunciado Oficial: *Dado P(3, 2, -1): a) Halle el simétrico P' respecto a $\pi \equiv x + 2y - z + 1 = 0$. b) Halle el simétrico P'' respecto a $r \equiv (x-1)/2 = y/1 = (z+2)/(-1)$.*

a) Simétrico P' respecto al plano π:
Recta perpendicular por P: { x = 3+λ, y = 2+2λ, z = -1-λ }.
Punto medio M = r ∩ π: (3+λ) + 2(2+2λ) - (-1-λ) + 1 = 0 ➔ 6λ + 9 = 0 ➔ λ **= -3/2**.
M(3 - 3/2, 2 - 3, -1 + 3/2) = M(3/2, -1, 1/2).
P' = 2M - P = (3, -2, 1) - (3, 2, -1) = **P'(0, -4, 2)**.

b) Simétrico P'' respecto a la recta r:
Plano perpendicular a r por P: 2(x - 3) + 1(y - 2) - 1(z + 1) = 0 ➔ **2x + y - z - 9 = 0**.
Corte N = r ∩ π (r: x = 1+2μ, y = μ, z = -2-μ): 2(1+2μ) + μ - (-2-μ) - 9 = 0 ➔ 6μ = 5 ➔ μ **= 5/6**.
N(8/3, 5/6, -17/6). Simétrico P'' = 2N - P: 2(8/3, 5/6, -17/6) - (3, 2, -1) = **P''(7/3, -1/3, -14/3)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** El punto de proyección es el PUNTO MEDIO entre P y su simétrico. El despeje vectorial obligatorio es P' = 2M - P.

PROBLEMA 9: ÁNGULO RECTA-PLANO Y PLANO PROYECTOR ORTOGONAL

Enunciado Oficial: *Sean $r \equiv (x-1)/2 = (y+1)/(-1) = z/2$ y $\pi \equiv x + y - 4z + 3 = 0$. a) Calcule el ángulo que forman. b) Halle el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.*

a) Ángulo entre recta y plano (SENO):
$\vec{v}_r = (2, -1, 2)$ ➔ $|\vec{v}_r| = \sqrt{9} = 3$ • $\vec{n}_\pi = (1, 1, -4)$ ➔ $|\vec{n}_\pi| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 2(1) - 1(1) + 2(-4) = -7$.
$\text{sen}(\beta) = |\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi| / (|\vec{v}_r| \, |\vec{n}_\pi|)$ = 7 / (3 · 3√2) = 7√2 / 18 ≈ 0,5499.
β **= arcsen(0,5499)** ≈ **33,36° (0,582 rad)**.

b) Plano π' que contiene a r y es ortogonal a π (Plano Proyector):
Pasa por A(1, -1, 0) ∈ r con directores $\vec{v}_r = (2, -1, 2)$ y $\vec{n}_\pi = (1, 1, -4)$:
$|(x-1, y+1, z), (2, -1, 2), (1, 1, -4)| = 0$ ➔ 2(x - 1) + 10(y + 1) + 3z = 0 ➔ **2x + 10y + 3z + 8 = 0**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Usar coseno en lugar de seno para el ángulo recta-plano es un error grave. El vector normal forma un ángulo complementario (90° - β) con la recta.

PROBLEMA 10: APLICACIONES MÉTRICAS: ÁREA DE TRIÁNGULO Y VOLUMEN DE TETRAEDRO

Enunciado Oficial: *Sean A(1, 1, 1), B(2, 3, 1), C(1, 4, 3) y D(3, 2, 4). a) Pruebe que forman un tetraedro. b) Calcule el área de ∆ABC. c) Calcule el volumen y la altura desde D.*

a) Condición de tetraedro (no coplanarios):
AB = (1, 2, 0), AC = (0, 3, 2), AD = (2, 1, 3).
Producto mixto [AB, AC, AD] = |(1, 2, 0), (0, 3, 2), (2, 1, 3)| = 1(7) - 2(-4) + 0 = **15** ≠ **0**.
Los vectores son L.I., los cuatro puntos no son coplanarios y **determinan un tetraedro**.

b) Área del triángulo ∆ABC:
AB × AC = |(i, j, k), (1, 2, 0), (0, 3, 2)| = (4, -2, 3) ➔ |AB × AC| = √(16 + 4 + 9) = √29.
Área = (1/2)|AB × AC| = √**29 / 2 u²** ≈ **2,693 u²**.

c) Volumen del tetraedro y altura desde D:
V = (1/6)|[AB, AC, AD]| = (1/6) · 15 = **15/6 = 5/2 = 2,5 u³**.
h_D = 3V / Área base = 3(5/2) / (√29 / 2) = 15 / √29 = **(15√29)/29 u** ≈ **2,785 u**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** El volumen del tetraedro lleva el factor 1/6 (no 1/3). En la altura, multiplicar por 3 el volumen (h = 3V / Área base).

CONCEPTO MÉTRICO	FÓRMULA MATEMÁTICA	NOTAS DE EXAMEN
Distancia Punto-Plano	d(P, π) = |Ax■+By■+Cz■+D| / √(A²+B²+C²)	Valor absoluto en el numerador
Distancia Punto-Recta	d(P, r) = |v_r × AP| / |v_r|	Dividir entre el módulo de la recta
Rectas que se Cruzan	d(r, s) = |[u, v, AB]| / |u × v|	Volumen paralelepípedo / Área base
Ángulo Recta-Plano	sen(β) = |v · n| / (|v| |n|)	¡Usar siempre función SENO!
Volumen Tetraedro	V = (1/6) |[AB, AC, AD]|	Factor 1/6 respecto al paralelepípedo

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA Y CRITERIOS OFICIALES: D. JOSÉ GARCÉS ÁVILA
Ingeniero Mecánico • Director Pedagógico de Academia MJ.
Preparación presencial de grupos reducidos en Santa Fe (Granada) e intensivos PAU Andalucía.
Canal Oficial de WhatsApp: +34 679 71 06 64 • Web: academia-santafe.es