SELECTIVIDAD PAU ANDALUCÍA • MATEMÁTICAS CC. SOCIALES II

10 PROBLEMAS ESTRELLA DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, DERIVADAS E INTEGRALES

PROBLEMA 1 • Continuidad y Derivabilidad con Parámetros en Función a Trozos

Enunciado Oficial: *Sea la función f(x) = { x² + ax + 1 si x ≤ 1 ; ln(x) + b si x > 1 }. a) Calcule 'a' y 'b' para que f sea derivable en x = 1. b) Para los valores hallados, determine si f es continua y derivable en todo ■.*

Resolución Paso a Paso:

1. Condición de continuidad en x = 1:
• f(1) = 1² + a(1) + 1 = **2 + a**.
• Límite lateral izquierdo: lim(x➔1■) (x² + ax + 1) = **2 + a**.
• Límite lateral derecho: lim(x➔1■) (ln(x) + b) = ln(1) + b = **b**.
Para que sea continua: **2 + a = b ➔ b - a = 2** (Ecuación 1).

2. Condición de derivabilidad en x = 1:
Derivadas para x ≠ 1: f'(x) = { 2x + a si x < 1 ; 1/x si x > 1 }.
• Derivada lateral izquierda: f'(1■) = 2(1) + a = **2 + a**.
• Derivada lateral derecha: f'(1■) = 1/1 = **1**.
Igualando derivadas laterales: 2 + a = 1 ➔ **a = -1**.
Sustituyendo en Ecuación 1: b = 2 + (-1) ➔ **b = 1**.

3. Estudio global en ■:
Para x < 1, f(x) = x² - x + 1 es un polinomio (continuo y derivable en ■). Para x > 1, f(x) = ln(x) + 1 es continua y derivable (su argumento x > 1 no anula el logaritmo). Como en x = 1 es continua y derivable, **f es continua y derivable en todo ■**.

■■ La Trampa de la Ponencia: Es obligatorio exigir primero la condición de continuidad antes de igualar derivadas. Igualar derivadas sin garantizar la continuidad anula el ejercicio si la función tuviese una discontinuidad de salto.

PROBLEMA 2 • Estudio Completo de Asíntotas en Función de Coste Medio

Enunciado Oficial: *El coste medio de producción (en miles de €) viene dado por $C(x) = (2x^2 + 5x + 8) / (x + 1)$ para $x > 0$ (x en miles de unidades). a) Halle las asíntotas y estudie la posición relativa de la curva. b) Calcule el nivel de producción donde el coste medio es mínimo.*

Resolución Paso a Paso:

a) Determinación analítica de asíntotas (x > 0):

• **Asíntota Vertical:** $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$. Como el dominio económico es $x > 0$, **no existe asíntota vertical en el dominio real de producción**.

• **Asíntota Horizontal:** $\lim(x \rightarrow +\infty) C(x) = +\infty \rightarrow$ **No existe asíntota horizontal**.

• **Asíntota Oblicua (y = mx + n):**

$m = \lim(x \rightarrow +\infty) C(x)/x = \lim (2x^2+5x+8)/(x^2+x) =$ **2**.

$n = \lim(x \rightarrow +\infty) [C(x) - 2x] = \lim [(2x^2+5x+8 - 2x^2-2x)/(x+1)] = \lim (3x+8)/(x+1) =$ **3**.

Asíntota oblicua: **y = 2x + 3**. Posición: $C(x) - (2x+3) = 5/(x+1) > 0 \rightarrow$ La curva está **por encima** de la asíntota.

b) Coste medio mínimo:

$C'(x) = [(4x+5)(x+1) - (2x^2+5x+8)(1)] / (x+1)^2 = (2x^2 + 4x - 3) / (x+1)^2 = 0 \rightarrow 2x^2 + 4x - 3 = 0$.

$x = [-4 \pm \sqrt{(16 + 24)}] / 4 = (-4 + \sqrt{40})/4 = (-2 + \sqrt{10})/2 \approx$ **0,581 miles de unidades (581 unidades)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** En problemas económicos contextualizados ($x > 0$), no considerar asíntotas verticales fuera del dominio de viabilidad comercial (como $x = -1$).

PROBLEMA 3 • Recta Tangente y Normal Paralela a una Recta Dada

Enunciado Oficial: *Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. a) Halle la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$. b) Determine en qué puntos de la curva la recta tangente es paralela a la recta $y = 9x - 5$.*

Resolución Paso a Paso:

a) Recta tangente en x = 2:

Punto de tangencia: $f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 = 8 - 12 + 2 =$ **-2** $\rightarrow$ **(2, -2)**.

Pendiente $m = f'(2)$: $f'(x) = 3x^2 - 6x \rightarrow f'(2) = 3(4) - 6(2) = 12 - 12 =$ **0** (Tangente horizontal).

Ecuación punto-pendiente: $y - (-2) = 0 \cdot (x - 2) \rightarrow$ **y = -2**.

b) Puntos con tangente paralela a y = 9x - 5 (pendiente m = 9):

$f'(x) = 9 \rightarrow 3x^2 - 6x = 9 \rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow$ **x = 3** y **x = -1**.

• Para x = 3: $f(3) = 27 - 27 + 2 = 2 \rightarrow$ **Punto P■(3, 2)**. Tangente: $y - 2 = 9(x - 3) \rightarrow$ **y = 9x - 25**.

• Para x = -1: $f(-1) = -1 - 3 + 2 = -2 \rightarrow$ **Punto P■(-1, -2)**. Tangente: $y - (-2) = 9(x - (-1)) \rightarrow$ **y = 9x + 7**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Recordar que dos rectas paralelas tienen la MISMA pendiente ($f'(x) = m$), mientras que si fuese perpendicular la pendiente sería $-1/m$.

PROBLEMA 4 • Monotonía, Extremos Relativos e Inflexión en Función Exponencial

Enunciado Oficial: *Sea la función f(x) = (2x - 4) · e^x. a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento. b) Determine sus extremos relativos. c) Calcule los puntos de inflexión y la curvatura.*

Resolución Paso a Paso:

a) Monotonía y primera derivada:
f'(x) = 2·e^x + (2x - 4)·e^x = **(2x - 2) · e^x**.
Puntos críticos: (2x - 2)·e^x = 0. Como e^x > 0 siempre, 2x - 2 = 0 ➔ **x = 1**.
• Intervalo (-∞, 1): f'(0) = -2 < 0 ➔ **f es estrictamente decreciente**.
• Intervalo (1, +∞): f'(2) = 2e² > 0 ➔ **f es estrictamente creciente**.

b) Extremos relativos:
En x = 1 la función pasa de decrecer a crecer ➔ **Mínimo relativo en (1, f(1))**.
f(1) = (2(1) - 4)·e¹ = **-2e** ≈ **-5,44** ➔ **Mínimo en (1, -2e)**.

c) Curvatura y puntos de inflexión (segunda derivada):
f''(x) = 2·e^x + (2x - 2)·e^x = **2x · e^x = 0 ➔ x = 0**.
• x < 0: f''(-1) = -2e■¹ < 0 ➔ **Cóncava hacia abajo (∩)**.
• x > 0: f''(1) = 2e > 0 ➔ **Convexa hacia arriba (∪)**.
Cambio de curvatura en x = 0 con f(0) = -4 ➔ **Punto de inflexión en (0, -4)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Al derivar productos con e^x, no olvidar sacar factor común e^x. Como e^x nunca se anula ni es negativo, el signo depende exclusivamente del factor polinómico.

PROBLEMA 5 • Optimización Empresarial: Maximización de Beneficios B(x)

Enunciado Oficial: *Una empresa vende un producto con función de ingresos I(x) = 300x - 2x² y costes totales C(x) = x² + 60x + 1200 (x en unidades producidas). a) Formule la función de beneficio B(x). b) Halle la producción que maximiza el beneficio y su valor. c) Calcule la producción de beneficio nulo (umbral de rentabilidad).*

Resolución Paso a Paso:

a) Función de beneficio B(x) = I(x) - C(x):
B(x) = (300x - 2x²) - (x² + 60x + 1200) = **-3x² + 240x - 1200**.

b) Maximización del beneficio:
Condición de primer orden: B'(x) = -6x + 240 = 0 ➔ 6x = 240 ➔ **x = 40 unidades**.
Condición de segundo orden: B''(x) = -6 < 0 (Máximo estricto confirmado).
Beneficio máximo: B(40) = -3(1600) + 240(40) - 1200 = -4800 + 9600 - 1200 = **3.600 €**.
Solución: Se maximiza el beneficio fabricando 40 unidades, con 3.600 € de ganancia.

c) Umbral de rentabilidad (B(x) = 0):
-3x² + 240x - 1200 = 0 ➔ x² - 80x + 400 = 0 ➔ x = [80 ± √(6400 - 1600)] / 2 = [80 ± √4800]/2.
x■ = (80 - 69,28)/2 ≈ **5,36 unidades** ; x■ = (80 + 69,28)/2 ≈ **74,64 unidades**.
La empresa obtiene beneficios en el intervalo de producción **entre 6 y 74 unidades**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Es imprescindible verificar la condición de segundo orden B''(x) < 0 para asegurar formalmente que el punto crítico es un máximo y no un mínimo.

PROBLEMA 6 • Fijación de Precios y Elasticidad de Demanda Lineal

Enunciado Oficial: *Un teatro con 500 plazas cobra 20 € por entrada y llena 300 asientos. Un estudio de mercado revela que por cada euro de rebaja en el precio acuden 25 espectadores más. a) Determine la función de ingresos en función del descuento 'x'. b) Calcule el precio de la entrada que maximiza la recaudación y el aforo cubierto.*

Resolución Paso a Paso:

a) Formulación de la función de ingresos:
Sea x el descuento en euros sobre el precio inicial de 20 € (Precio p = 20 - x):
Número de espectadores: N(x) = 300 + 25x (con N(x) ≤ 500 aforo máximo ➔ 25x ≤ 200 ➔ x ≤ 8 €).
Función de ingresos I(x) = (20 - x) · (300 + 25x) = 6000 + 500x - 300x - 25x² = **-25x² + 200x + 6000**.

b) Maximización de los ingresos:
I'(x) = -50x + 200 = 0 ➔ 50x = 200 ➔ **x = 4 € de descuento**.
I''(x) = -50 < 0 (Garantiza máximo absoluto).
• **Precio óptimo:** p = 20 - 4 = **16 € por entrada**.
• **Espectadores:** N(4) = 300 + 25(4) = **400 espectadores** (menor que el aforo de 500 plazas).
• **Recaudación máxima:** I(4) = 16 · 400 = **6.400 €** (frente a 6.000 € iniciales).

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Comprobar que el número de espectadores en el óptimo no supera el aforo total del teatro (400 ≤ 500). Si superase el aforo, el óptimo estaría acotado por la capacidad física.

PROBLEMA 7 • Cálculo de Primitivas Cuasi-Inmediatas y Logarítmicas

Enunciado Oficial: *Calcule las siguientes integrales indefinidas: a) ∫ (3x² - 4x + 5) dx. b) ∫ [(2x + 3) / (x² + 3x + 7)] dx. c) ∫ x · e^(x² - 1) dx. d) Halle la primitiva F(x) de f(x) = 3x² - 2x que cumple F(1) = 5.*

Resolución Paso a Paso:

a) Integral polinómica:
∫ (3x² - 4x + 5) dx = 3(x³/3) - 4(x²/2) + 5x + C = **x³ - 2x² + 5x + C**.

b) Integral logarítmica tipo ∫ [u'(x) / u(x)] dx:
u(x) = x² + 3x + 7 ➔ u'(x) = 2x + 3. El numerador es exactamente la derivada del denominador:
∫ [(2x + 3) / (x² + 3x + 7)] dx = **ln|x² + 3x + 7| + C**.

c) Integral exponencial cuasi-inmediata tipo ∫ u'(x) · e^(u(x)) dx:
u(x) = x² - 1 ➔ u'(x) = 2x. Ajustando la constante: (1/2) ∫ 2x · e^(x²-1) dx = **(1/2) · e^(x² - 1) + C**.

d) Primitiva con condición inicial F(1) = 5:
F(x) = ∫ (3x² - 2x) dx = x³ - x² + C.
F(1) = 1³ - 1² + C = 0 + C = 5 ➔ C = 5 ➔ **F(x) = x³ - x² + 5**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Olvidar la constante de integración (+ C) en las integrales indefinidas o no escribir el valor absoluto en el argumento del logaritmo neperiano ln|u(x)|.

PROBLEMA 8 • Regla de Barrow y Área entre Curva y Eje OX

Enunciado Oficial: *Calcule el área del recinto plano limitado por la curva $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas OX entre $x = -2$ y $x = 2$.*

Resolución Paso a Paso:

1. Puntos de corte con el eje OX (f(x) = 0):
$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow$ **$x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$**.
El intervalo [-2, 2] queda dividido en dos recintos: R■ = [-2, 0] y R■ = [0, 2].

2. Cálculo de la primitiva general:
$F(x) = \int (x^3 - 4x)\,dx = x■/4 - 2x^2$.

3. Aplicación de la Regla de Barrow:
• **Recinto R■ [-2, 0]:** $f(-1) = -1 + 4 = 3 > 0$ (Curva sobre el eje OX).
Área■ = $F(0) - F(-2) = [0] - [(-2)■/4 - 2(-2)^2] = 0 - [16/4 - 8] = 0 - [4 - 8] =$ **4 u²**.
• **Recinto R■ [0, 2]:** $f(1) = 1 - 4 = -3 < 0$ (Curva bajo el eje OX).
Área■ = $|F(2) - F(0)| = |[2■/4 - 2(2)^2] - 0| = |4 - 8| = |-4| =$ **4 u²**.

4. Área total del recinto:
Área Total = Área■ + Área■ = 4 + 4 = **8 u²**.

■■ La Trampa de la Ponencia: Calcular directamente $\int_{■■}^{2} (x^3 - 4x)\,dx$ daría 0 por simetría impar de la función. Es obligatorio separar en dos integrales y aplicar valores absolutos.

PROBLEMA 9 • Área Encerrada entre Parábola y Recta

Enunciado Oficial: *Halle el área de la región acotada comprendida entre la parábola $f(x) = -x^2 + 4x$ y la recta $g(x) = x$.*

Resolución Paso a Paso:

1. Puntos de intersección (Límites de integración):
$f(x) = g(x) \rightarrow -x^2 + 4x = x \rightarrow -x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(-x + 3) = 0 \rightarrow$ **$x = 0$ y $x = 3$**.

2. Determinación de función techo y función suelo en (0, 3):
Evaluando en x = 1: $f(1) = -1 + 4 = 3$; $g(1) = 1$.
Como $f(1) > g(1)$, la parábola f(x) está por encima de la recta g(x) (Función techo = f, suelo = g).

3. Planteamiento de la integral y Regla de Barrow:
Función diferencia: $h(x) = f(x) - g(x) = (-x^2 + 4x) - x =$ **$-x^2 + 3x$**.
Primitiva: $H(x) = \int (-x^2 + 3x)\,dx = -x^3/3 + 3x^2/2$.
Área = $H(3) - H(0) = [-3^3/3 + 3(3^2)/2] - [0] = [-27/3 + 27/2] = -9 + 13{,}5 =$ **4,5 u² (9/2 u²)**.

4. Conclusión: El área encerrada es exactamente de **9/2 u² = 4,5 unidades cuadradas**.

■■ La Trampa de la Ponencia: No justificar cuál es la función que va por encima. Si se resta al revés, se obtiene un área negativa (-4,5 u²), lo cual penaliza gravemente salvo que se aplique valor absoluto justificado.

PROBLEMA 10 • Aplicación Económica Integral: Excedente del Consumidor

Enunciado Oficial: *La curva de demanda de un producto es P(q) = 100 - 2q (q en unidades, P en €). Si el precio de equilibrio del mercado es P■ = 40 €, calcule: a) La cantidad de equilibrio q■. b) El excedente del consumidor definido por EC = ∫■^(q■) [P(q) - P■] dq.*

Resolución Paso a Paso:

a) Cantidad de equilibrio q■:
P(q■) = 40 ➔ 100 - 2q■ = 40 ➔ 2q■ = 60 ➔ **q■ = 30 unidades**.

b) Excedente del consumidor (EC):
Función diferencia a integrar: P(q) - P■ = (100 - 2q) - 40 = **60 - 2q**.
EC = ∫■³■ (60 - 2q) dq.
Primitiva: G(q) = 60q - q².
Aplicando la Regla de Barrow entre 0 y 30:
EC = G(30) - G(0) = [60(30) - (30)²] - [0] = 1800 - 900 = **900 €**.
Conclusión: El excedente del consumidor en el equilibrio es de **900 €** (representa el ahorro acumulado de los consumidores dispuestos a pagar un precio superior al de mercado).

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Confundir el excedente del consumidor con el ingreso total. El excedente es el área triangular entre la curva de demanda y la recta horizontal del precio de mercado.

CONCEPTO / MODELO	REGLA ANALÍTICA	CRITERIO PONENCIA SELECTIVIDAD
Derivabilidad	Continua + f'(x■■) = f'(x■■)	Exigir primero SIEMPRE la continuidad
Recta Tangente	y - f(x■) = f'(x■)(x - x■)	Paralela ➔ f'(x■) = m ; Horizontal ➔ f'(x■) = 0
Optimización	f'(x) = 0 y f''(x) < 0 (Máx)	Obligatorio comprobar la segunda derivada
Regla de Barrow	∫■■ f(x) dx = F(b) - F(a)	F(x) es una primitiva cualquiera sin constante
Área entre Curvas	∫■■ [Techo - Suelo] dx	Descomponer si hay cortes interiores

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA Y CRITERIOS OFICIALES: D. JOSÉ GARCÉS ÁVILA
Ingeniero Mecánico • Director Pedagógico de Academia MJ.
Preparación presencial de grupos reducidos en Santa Fe (Granada) e intensivos PAU Andalucía.
Canal Oficial de WhatsApp: +34 679 71 06 64 • Web: academia-santafe.es