SELECTIVIDAD PAU ANDALUCÍA • MATEMÁTICAS CC. SOCIALES II

10 PROBLEMAS ESTRELLA DE ÁLGEBRA MATRICIAL Y PROGRAMACIÓN LINEAL

PROBLEMA 1 • Ecuación Matricial con Inversa y Despeje No Conmutativo

Enunciado Oficial: *Sean las matrices A = ((2, 1), (3, 2)), B = ((1, 0), (-1, 2)) y C = ((5, 2), (1, 4)). Resuelva la ecuación matricial A · X - B = C. Calcule A■¹ y justifique detalladamente el despeje de la matriz X.*

Resolución Paso a Paso:

1. Despeje riguroso de la matriz X:
A · X - B = C ➔ A · X = B + C. Multiplicando por la izquierda por A■¹:
A■¹ · (A · X) = A■¹ · (B + C) ➔ (A■¹ · A) · X = A■¹ · (B + C) ➔ **X = A■¹ · (B + C)**.

2. Cálculo de la matriz inversa A■¹:
|A| = (2)(2) - (1)(3) = 4 - 3 = 1 ≠ 0 (Existe A■¹).
Matriz adjunta traspuesta: (Adj(A))^t = ((2, -1), (-3, 2)) ➔ **A■¹ = ((2, -1), (-3, 2))**.

3. Suma y producto final:
B + C = ((1+5, 0+2), (-1+1, 2+4)) = ((6, 2), (0, 6)).
X = ((2, -1), (-3, 2)) · ((6, 2), (0, 6)) = ((2·6 + (-1)·0, 2·2 + (-1)·6), ((-3)·6 + 2·0, (-3)·2 + 2·6)) = **((12, -2), (-18, 6))**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** El producto de matrices NO es conmutativo. Escribir X = (B+C)·A■¹ o 'pasar A dividiendo' anula automáticamente toda la puntuación del ejercicio.

PROBLEMA 2 • Existencia de Inversa según Parámetro 'a' y Cálculo de Potencias

Enunciado Oficial: *Sea la matriz M(a) = ((1, a, 1), (0, 1, a), (a, 0, 1)). a) Determine para qué valores de 'a' existe M(a)■¹. b) Para a = 0, calcule M(0)■¹. c) Para a = 0, obtenga la potencia M(0)¹■.*

Resolución Paso a Paso:

a) Condición de invertibilidad:
|M(a)| = 1 + a³ = 0 ➔ a³ = -1 ➔ a = -1. Por tanto, **existe M(a)■¹ para todo a ∈ ■ \ {-1}**.

b) Matriz inversa para a = 0:
M(0) = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), con |M(0)| = 1.
Cálculo de adjuntos: Adj(M(0)) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, 0, 1)). Traspuesta: (Adj)^t = ((1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).
M(0)■¹ = ((1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).

c) Potencia M(0)¹■ por inducción:
M(0)² = ((1, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) ; M(0)³ = ((1, 0, 3), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).
Por inducción, M(0)■ = ((1, 0, n), (0, 1, 0), (0, 0, 1)). Para n = 10 ➔ **M(0)¹■ = ((1, 0, 10), (0, 1, 0), (0, 0, 1))**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** En el apartado c), no basta con multiplicar directamente; se debe explicitar la conjetura de la ley de recurrencia demostrando que solo varía el elemento (1,3).

PROBLEMA 3 • Planteamiento Comercial en Forma Matricial A · X = B

Enunciado Oficial: *Una papelería vende tres tipos de lotes escolares A, B y C. El lote A lleva 1 cuaderno, 2 bolígrafos y 1 carpeta. El lote B lleva 2 cuadernos, 1 bolígrafo y 2 carpetas. El lote C lleva 1 cuaderno, 1 bolígrafo y 3 carpetas. En una semana se han vendido 130 cuadernos, 120 bolígrafos y 170 carpetas. a) Plantee el sistema en forma matricial A · X = B. b) Calcule los lotes vendidos de cada tipo.*

Resolución Paso a Paso:

a) Planteamiento algebraico y matricial:
Sean x, y, z los lotes vendidos de A, B y C respectivamente:
• Cuadernos: 1x + 2y + 1z = 130 ; • Bolígrafos: 2x + 1y + 1z = 120 ; • Carpetas: 1x + 2y + 3z = 170.
Forma matricial: **((1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 3)) · ((x), (y), (z)) = ((130), (120), (170))**.

b) Resolución por reducción / Gauss:
E■ - E■: 2z = 170 - 130 = 40 ➔ **z = 20 lotes C**.
E■ - 2E■: (2x+y+z) - 2(x+2y+z) = -3y - z = 120 - 260 = -140 ➔ -3y - 20 = -140 ➔ 3y = 120 ➔ **y = 40 lotes B**.
Sustituyendo en E■: x + 2(40) + 20 = 130 ➔ x + 100 = 130 ➔ **x = 30 lotes A**.
Solución: Se vendieron 30 lotes A, 40 lotes B y 20 lotes C.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Es imprescindible definir claramente las incógnitas con sus unidades ('número de lotes') y enunciar la respuesta final en el contexto real del problema.

PROBLEMA 4 • Discusión de Sistema con Parámetro 'k' por Rouché-Frobenius

Enunciado Oficial: *Considere el sistema: x + y + z = 2 ; 2x + 3y + kz = 5 ; x + ky + z = 1. a) Discuta el sistema según el parámetro real k. b) Resuelva para k = 0. c) ¿Existe algún valor de k para el cual sea compatible indeterminado?*

Resolución Paso a Paso:

a) Teorema de Rouché-Frobenius:
|A| = -(k - 1)(k - 2) = 0 ➔ Valores críticos: **k = 1** y **k = 2**.
• **k ≠ 1 y k ≠ 2:** |A| ≠ 0 ➔ rg(A) = rg(A*) = 3 = nº incógnitas ➔ **S.C.D. (Solución única)**.
• **k = 2:** rg(A) = 2. Menor orlado con columna independiente: |A*| = -2 ≠ 0 ➔ rg(A*) = 3 ≠ rg(A) ➔ **S.I. (Incompatible)**.
• **k = 1:** Fila 1 (x+y+z=2) y Fila 3 (x+y+z=1) son contradictorias ➔ rg(A) = 2, rg(A*) = 3 ➔ **S.I. (Incompatible)**.

b) Resolución para k = 0 (S.C.D.):
x + y + z = 2 ; 2x + 3y = 5 ; x + z = 1.
Restando la 3ª a la 1ª: y = 1. En la 2ª: 2x + 3(1) = 5 ➔ 2x = 2 ➔ x = 1. En la 3ª: 1 + z = 1 ➔ z = 0.
Solución única: (x, y, z) = (1, 1, 0).

c) Existencia de S.C.I.: NO existe ningún valor de k donde el sistema sea compatible indeterminado, ya que para los dos valores críticos (k=1, k=2) el sistema resulta incompatible.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** No asumir que cuando |A| = 0 el sistema es siempre compatible indeterminado. En este examen ambos valores críticos conducen a sistemas incompatibles.

PROBLEMA 5 • Programación Lineal — Fabricación y Maximización de Beneficios

Enunciado Oficial: *Un taller fabrica dos modelos de sudaderas: Básica (x) y Premium (y). La básica requiere 1 m de tela y 2 h de trabajo, dando 15 € de beneficio. La premium requiere 2 m de tela y 1 h de trabajo, dando 20 € de beneficio. Se dispone de 80 m de tela y 100 h de trabajo semanales. a) Plantee restricciones y función objetivo. b) Calcule los vértices de la región factible. c) Calcule la producción óptima.*

Resolución Paso a Paso:

a) Modelo de programación lineal:
Variables: x = sudaderas básicas, y = sudaderas premium.
Restricciones: x ≥ 0 ; y ≥ 0 ; Tela: x + 2y ≤ 80 ; Trabajo: 2x + y ≤ 100.
Función objetivo a maximizar: **B(x, y) = 15x + 20y**.

b) Región factible y vértices:
Región poligonal convexa acotada con vértices en intersecciones:
• **O(0, 0):** B(0, 0) = 0 €.
• **A(50, 0):** Intersección 2x+y=100 con y=0 ➔ B(50, 0) = 15(50) = 750 €.
• **B(40, 20):** Intersección x+2y=80 y 2x+y=100 ➔ Multiplicando por 2 la 2ª: 4x+2y=200 ➔ 3x=120 ➔ x=40, y=20 ➔ B(40, 20) = 15(40) + 20(20) = 600 + 400 = **1.000 €**.
• **C(0, 40):** Intersección x+2y=80 con x=0 ➔ B(0, 40) = 20(40) = 800 €.

c) Solución óptima:
El beneficio máximo es de **1.000 € semanales**, fabricando **40 sudaderas básicas y 20 sudaderas premium**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Olvidar las condiciones de no negatividad x ≥ 0, y ≥ 0 o no evaluar la función objetivo en TODOS los vértices de la región poligonal.

PROBLEMA 6 • Programación Lineal — Minimización de Costes (Región No Acotada)

Enunciado Oficial: *Un ganadero prepara pienso mezclando P1 (x) y P2 (y). P1 contiene 2 u. de calcio y 1 de proteína, costando 0,30 €/kg. P2 contiene 1 u. de calcio y 2 de proteína, costando 0,40 €/kg. El lote requiere mínimo 60 u. de calcio y 60 u. de proteína. Por digestibilidad, x ≤ 80. a) Formule el modelo. b) Determine vértices. c) Halle el coste mínimo.*

Resolución Paso a Paso:

a) Formulación matemática:
Restricciones: x ≥ 0, y ≥ 0 ; Calcio: 2x + y ≥ 60 ; Proteína: x + 2y ≥ 60 ; Límite P1: x ≤ 80.
Función objetivo a minimizar: **C(x, y) = 0,30x + 0,40y**.

b) Región factible y vértices:
Región no acotada superiormente en la variable y:
• **V■(0, 60):** En x=0, 2(0)+y=60 ➔ C(0, 60) = 0,40(60) = 24,00 €.
• **V■(20, 20):** Intersección 2x+y=60 y x+2y=60 ➔ x=20, y=20 ➔ C(20, 20) = 0,30(20) + 0,40(20) = 6 + 8 = **14,00 €**.
• **V■(60, 0):** En y=0, x+2(0)=60 ➔ x=60 ≤ 80 ➔ C(60, 0) = 0,30(60) = 18,00 €.
• **V■(80, 0):** Límite x=80 con y=0 ➔ C(80, 0) = 0,30(80) = 24,00 €.

c) Coste mínimo y justificación de extremo:
Al tender y ➔ +∞, C(x, y) ➔ +∞. Por tanto, el mínimo absoluto se alcanza en el vértice **V■(20, 20)**, con un **coste mínimo de 14,00 €** utilizando **20 kg de P1 y 20 kg de P2**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** En regiones no acotadas, se debe justificar que la función tiende a +∞ para garantizar la existencia de un mínimo global en uno de los vértices.

PROBLEMA 7 • Campaña de Publicidad con Cupos Relativos (y ≥ 2x)

Enunciado Oficial: *Una empresa publicita en Redes Sociales (x) y Prensa (y). En redes cuesta 50 € y capta 40 clientes. En prensa cuesta 100 € y capta 60 clientes. Presupuesto máximo 1.500 €. Deben publicarse al menos 4 anuncios en redes (x ≥ 4) y los de prensa deben ser al menos el doble que en redes (y ≥ 2x). Maximice los clientes.*

Resolución Paso a Paso:

a) Modelo de optimización:
Restricciones: x ≥ 4 ; y ≥ 2x ; Presupuesto: 50x + 100y ≤ 1.500 ➔ **x + 2y ≤ 30**.
Función objetivo a maximizar: **A(x, y) = 40x + 60y**.

b) Región factible triangular y vértices:
• **V■(4, 8):** Intersección x = 4 con y = 2x ➔ A(4, 8) = 40(4) + 60(8) = 160 + 480 = 640 clientes.
• **V■(4, 13):** Intersección x = 4 con x + 2y = 30 ➔ 4 + 2y = 30 ➔ y = 13 ➔ A(4, 13) = 40(4) + 60(13) = 160 + 780 = 940 clientes.
• **V■(6, 12):** Intersección y = 2x con x + 2y = 30 ➔ x + 2(2x) = 30 ➔ 5x = 30 ➔ x = 6, y = 12 ➔ A(6, 12) = 40(6) + 60(12) = 240 + 720 = **960 clientes**.

c) Solución óptima:
El alcance máximo es de **960 clientes potenciales**, contratando **6 anuncios en redes sociales y 12 anuncios en prensa**, agotando íntegramente los 1.500 € de presupuesto.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Traducir 'al menos el doble' como x ≥ 2y en lugar de y ≥ 2x. Un fallo en el planteamiento de inecuaciones relativas arrastra el cálculo de todos los vértices.

PROBLEMA 8 • Región No Acotada — Estudio de Existencia de Extremos de F(x, y)

Enunciado Oficial: *Sea la región del plano definida por: $x + y \geq 4$; $x - y \leq 2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$. a) Dibuje la región y calcule sus vértices. b) Sobre dicha región, determine si $F(x, y) = 3x + 2y$ alcanza máximo y/o mínimo. c) Repita el análisis para $G(x, y) = -2x - 3y$.*

Resolución Paso a Paso:

a) Región factible y vértices:
Rectas: r■: x+y=4 (pasa por (0,4) y (4,0)) ; r■: x-y=2 (pasa por (2,0) y (3,1)).
Intersección de r■ y r■: sumando ambas ➔ 2x = 6 ➔ x = 3, y = 1 ➔ **V■(3, 1)**.
En el eje Y (x=0): 0+y ≥ 4 ➔ **V■(0, 4)**.
La región está delimitada por la semirrecta desde (0,4) por r■ hasta (3,1), y desde (3,1) hacia infinito sobre r■ (y = x - 2, con x ≥ 3).

b) Análisis de F(x, y) = 3x + 2y:
• Vértices: F(V■) = 3(0) + 2(4) = **8** ; F(V■) = 3(3) + 2(1) = **11**.
• **Mínimo:** Se alcanza en **V■(0, 4) con valor mínimo 8**.
• **Máximo:** Tomando puntos (k, k) con k ➔ +∞, F(k, k) = 5k ➔ +∞. **NO existe máximo**.

c) Análisis de G(x, y) = -2x - 3y:
• G(V■) = -2(0) - 3(4) = **-12** ; G(V■) = -2(3) - 3(1) = **-9**.
• **Máximo:** Se alcanza en **V■(3, 1) con valor máximo -9**.
• **Mínimo:** Al tender x, y ➔ +∞, G(x, y) ➔ -∞. **NO existe mínimo**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** No afirmar a la ligera que una función no acotada no tiene extremos. Puede no tener máximo pero sí tener un mínimo global bien definido en un vértice.

PROBLEMA 9 • Matriz Periódica ($A^3 = I$■), Potencias Cíclicas A^{2027}■ y Ecuaciones

Enunciado Oficial: *Dada la matriz $A = ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$. a) Calcule A^2 y A^3. b) Demuestre que es periódica y obtenga A^{2027}■. c) Resuelva la ecuación matricial A■ · $X + I$■ = A^2.*

Resolución Paso a Paso:

a) Cálculo de potencias:
$A^2 = ((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$; $A^3 = A^2 \cdot A = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) =$ **I**■.

b) Periodicidad y cálculo de A^{2027}■:
Al ser $A^3 = I$■, las potencias son cíclicas de periodo 3: A■ = A^(n mod 3).
Dividiendo 2027 entre 3: 2027 = 3 · 675 + 2 (resto 2).
Por tanto: **A^{2027}■ = (A^3)■■■ · A^2 = (I■)■■■ · A^2 = A^2 = ((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))**.

c) Resolución de A■ · X + I■ = A^2:
A■ = $A^3 \cdot A^2$ = I■ · A^2 = A^2. La ecuación queda: $A^2 \cdot X + I$■ = A^2 ➔ $A^2 \cdot X = A^2 - I$■.
Multiplicando por la izquierda por (A^2)■$^{-1}$. Como $A^3 = A \cdot A^2 = I$■, se deduce que (A^2)■$^{-1}$ = A:
$X = A \cdot (A^2 - I$■$) = A^3 - A = I$■ $- A$ ➔ **X = ((1, -1, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1))**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Deducir que (A^2)■$^{-1}$ = A directamente a partir de $A \cdot A^2 = I$■ ahorra calcular la inversa 3×3 por adjuntos, ganando 10 minutos cruciales en el examen.

PROBLEMA 10 • Problema Financiero de Inversión en Tres Fondos (Sistema 3×3)

Enunciado Oficial: *Un inversor reparte 100.000 € en tres productos financieros A, B y C con rendimientos anuales del 3%, 5% y 7%. Al año obtiene 5.200 € de intereses. Sabiendo que en C invirtió lo mismo que en A y B juntos, halle cuánto dinero destinó a cada producto.*

Resolución Paso a Paso:

1. Definición de variables y sistema de ecuaciones:
Sean x, y, z los importes en euros invertidos en A, B y C respectivamente:
• Capital total: x + y + z = 100.000 €.
• Intereses totales: 0,03x + 0,05y + 0,07z = 5.200 ➔ 3x + 5y + 7z = 520.000 €.
• Condición cruzada: z = x + y ➔ x + y - z = 0.

2. Resolución analítica directa:
Sustituyendo z = x + y en la primera ecuación: (x + y) + (x + y) = 100.000 ➔ 2(x + y) = 100.000 ➔ **x + y = 50.000 €**.
Por tanto: **z = 50.000 € invertidos en el Producto C**.
Sustituyendo z = 50.000 en la ecuación de intereses: 3x + 5y + 7(50.000) = 520.000 ➔ 3x + 5y + 350.000 = 520.000 ➔ **3x + 5y = 170.000 €**.
Como x + y = 50.000 ➔ Multiplicando por 3: 3x + 3y = 150.000 €.
Restando ambas ecuaciones: 2y = 20.000 ➔ **y = 10.000 € invertidos en el Producto B**.
Despejando x: x = 50.000 - 10.000 ➔ **x = 40.000 € invertidos en el Producto A**.

3. Comprobación de solvencia:
40.000 + 10.000 + 50.000 = 100.000 €. Intereses: 0,03(40.000) + 0,05(10.000) + 0,07(50.000) = 1.200 + 500 + 3.500 = 5.200 € (Correcto).

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Trabajar con decimales en los porcentajes multiplica el riesgo de error aritmético. Multiplicar toda la ecuación de intereses por 100 para operar con números enteros.

CONCEPTO / MODELO	REGLA MATEMÁTICA	CLAVE PONENCIA ANDALUZA
Despeje Matricial	$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$	No conmutativo: Prohibido dividir matrices
Rouché-Frobenius	rg(A) = rg(A*) = n ➔ S.C.D.	Si rg(A) ≠ rg(A*) ➔ Incompatible
Prog. Lineal Acotada	Máx/Mín en vértices del polígono	Evaluar SIEMPRE todos los vértices en Z(x,y)
Prog. Lineal No Acotada	Z ➔ +∞ o -∞ en el infinito	Justificar analíticamente si el extremo existe
Potencias Cíclicas	$A^{k} = I \rightarrow$ Periodo k	Calcular exponente mediante resto de la división

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA Y CRITERIOS OFICIALES: D. JOSÉ GARCÉS ÁVILA
Ingeniero Mecánico • Director Pedagógico de Academia MJ.
Preparación presencial de grupos reducidos en Santa Fe (Granada) e intensivos PAU Andalucía.
Canal Oficial de WhatsApp: +34 679 71 06 64 • Web: academia-santafe.es