10 Problemas Estrella Resueltos: Análisis e Integrales

Continuidad, Derivabilidad, Teoremas de Bolzano y Rolle, Optimización, Cálculo de Primitivas y Regla de Barrow

PROTOCOLO CLAVE PONENCIA ANDALUZA:
• **Derivabilidad a Trozos:** Exigir primero continuidad (límites laterales = f(x■)) antes de derivar. La derivabilidad sin continuidad es nula.
• **Bolzano & Rolle:** Bolzano demuestra EXISTENCIA en intervalo abierto (f continua en [a,b] y cambio de signo). Rolle demuestra UNICIDAD por contradicción (si f'(x) ≠ 0 no puede haber dos raíces).
• **Optimización:** Hallar punto crítico (f'=0) y JUSTIFICAR OBLIGATORIAMENTE el extremo con f'' o tabla de signos.
• **Regla de Barrow:** Área = ∫ |f(x) - g(x)| dx entre puntos de corte. Indicar siempre unidades cuadradas (u²).

PROBLEMA 1: CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD CON PARÁMETROS A Y B

Enunciado Oficial: *Sea f(x) = { a x² + b x + 1 si x ≤ 1 ; 2/(x + 1) si x > 1 }. a) Halle a y b para que sea derivable en ■. b) Determine los extremos relativos en (-∞, 1).*

a) Continuidad y derivabilidad en x = 1:
• **Continuidad:** lim(x→1■) f(x) = a(1)² + b(1) + 1 = a + b + 1 = f(1).
lim(x→1■) f(x) = 2/(1 + 1) = 1. Igualando: a + b + 1 = 1 ➔ **a + b = 0 (b = -a)**.
• **Derivabilidad:** f'(x) = 2ax + b si x < 1 ; f'(x) = -2/(x+1)² si x > 1.
f'(1■) = 2a + b ; f'(1■) = -2/(2)² = -1/2. Igualando: 2a + b = -1/2.
Como b = -a: 2a - a = -1/2 ➔ **a = -1/2** y **b = 1/2**.

b) Extremos relativos en (-∞, 1):
Para x < 1: f(x) = -1/2 x² + 1/2 x + 1 ➔ f'(x) = -x + 1/2 = 0 ➔ **x = 1/2**.
f''(x) = -1 < 0 ➔ En x = 1/2 hay un **máximo relativo**.
Valor del máximo: f(1/2) = -1/2(1/4) + 1/2(1/2) + 1 = **9/8**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Es obligatorio exigir la condición de continuidad (a + b = 0) antes de derivar. Igualar derivadas sin probar continuidad descuenta la mitad de la nota.

PROBLEMA 2: ESTUDIO COMPLETO DE FUNCIONES Y TODAS SUS ASÍNTOTAS

Enunciado Oficial: *Dada $f(x) = (x^2 - 4)/(2x - 4)$ y $g(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$: a) Analice la discontinuidad de f en x=2. b) Halle las asíntotas de g y la posición relativa de la curva.*

a) Discontinuidad evitable de f(x):
Dom(f) = ■ \ {2}. En x = 2: $\lim_{x\to 2} (x-2)(x+2) / [2(x-2)] = \lim (x+2)/2 = 4/2 =$ **2 (finito)**.
No hay asíntota vertical: presenta un punto de **discontinuidad evitable en (2, 2)**.

b) Asíntotas de $g(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$:
• **A. Vertical:** $\lim_{x\to 1■}$ g(x) = 2/0■ = -∞ ; $\lim_{x\to 1■}$ g(x) = 2/0■ = +∞ ➔ **Recta x = 1**.
• **A. Horizontal:** $\lim_{x\to\pm\infty}$ g(x) = ±∞ (No existe asíntota horizontal).
• **A. Oblicua y = mx + n:** m = lim g(x)/x = lim $(x^2+1)/(x^2-x)$ = **1**.
n = lim [g(x) - x] = lim (x+1)/(x-1) = **1 ➔ Asíntota oblicua: y = x + 1**.
• **Posición relativa:** d(x) = g(x) - (x+1) = **2/(x - 1)**.
Para x → +∞: d(x) > 0 (curva **por encima**). Para x → -∞: d(x) < 0 (curva **por debajo**).

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Si el denominador se anula pero el numerador también y el límite da un número finito, NO hay asíntota vertical, es discontinuidad evitable.

PROBLEMA 3: RECTA TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA

Enunciado Oficial: *Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$: a) Halle la recta tangente y normal en x = 2. b) Halle los puntos de la gráfica con tangente paralela a $r \equiv 9x - y + 5 = 0$.*

a) Recta tangente y normal en x = 2:
Punto: y■ = f(2) = 8 - 12 + 2 = -2 ➔ P(2, -2).
Derivada: $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ➔ Pendiente tangente: $m_t = f'(2) = 12 - 12 =$ **0 (horizontal)**.
• **Recta tangente:** y - (-2) = 0(x - 2) ➔ **y = -2**.
• **Recta normal:** Perpendicular a la horizontal en P(2, -2) ➔ **x = 2 (vertical)**.

b) Tangentes paralelas a $r \equiv$ y = 9x + 5 (pendiente m = 9):
f'(x) = 9 ➔ $3x^2 - 6x - 9 = 0$ ➔ $x^2 - 2x - 3 = 0$ ➔ (x - 3)(x + 1) = 0.
• Para x■ = 3: f(3) = 27 - 27 + 2 = 2 ➔ **P■(3, 2)**.
• Para x■ = -1: f(-1) = -1 - 3 + 2 = -2 ➔ **P■(-1, -2)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Cuando $m_t = 0$, no se puede hacer $m_n = -1/0$. Se justifica geométricamente que la recta perpendicular a la horizontal y = y■ es la vertical x = x■.

PROBLEMA 4: TEOREMA DE BOLZANO Y EXISTENCIA DE RAÍCES

Enunciado Oficial: *Pruebe que e^x + x - 2 = 0 posee al menos una solución en [0, 1] y aproxímela por bisección con error menor que 0,25.*

1. Hipótesis del Teorema de Bolzano:
Sea f(x) = e^x + x - 2. Por ser suma de exponencial y polinómica, es **continua en el intervalo cerrado [0, 1]**.
• f(0) = e■ + 0 - 2 = 1 - 2 = **-1 < 0**.
• f(1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 ≈ **+1,718 > 0**.
Al haber cambio de signo (f(0)·f(1) < 0), por el Teorema de Bolzano **existe al menos un c ∈ (0, 1) con f(c) = 0**.

2. Aproximación por Bisección (error < 0,25):
• Punto medio x■ = 0,5: f(0,5) = √e + 0,5 - 2 ≈ 1,649 - 1,5 = **+0,149 > 0** ➔ Raíz en [0; 0,5].
• Punto medio x■ = 0,25: f(0,25) ≈ 1,284 + 0,25 - 2 = **-0,466 < 0** ➔ Raíz en [0,25; 0,5].
Punto central de [0,25; 0,5]: **x = 0,375** con error ε ≤ (0,5 - 0,25)/2 = **0,125 < 0,25**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Enunciar con precisión que la continuidad se exige en el intervalo CERRADO [a, b] y la existencia de la raíz se garantiza en el intervalo ABIERTO (a, b).

PROBLEMA 5: TEOREMA DE ROLLE Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN REAL

Enunciado Oficial: *Demuestre razonadamente que $2x^3 + 3x - 5 = 0$ tiene exactamente una única raíz real en ■.*

1. Existencia de raíz (Bolzano en [0, 2]):
f(x) = $2x^3$ + 3x - 5 continua en [0, 2]. f(0) = -5 < 0 y f(2) = 17 > 0 ➔ Existe al menos una raíz (de hecho, x = 1).

2. Demostración de unicidad por reducción al absurdo (Rolle):
Supongamos que existiesen dos raíces distintas x■ < x■ con f(x■) = f(x■) = 0.
Por ser polinómica, f es continua en [x■, x■] y derivable en (x■, x■).
Por el **Teorema de Rolle**, debería existir un punto α ∈ (x■, x■) tal que **f'(α) = 0**.
Sin embargo, calculamos la derivada: **f'(x) = $6x^2$ + 3 ≥ 3 > 0** ∀ **x** ∈ ■.
La derivada nunca se anula (es estrictamente positiva en todo ■).
Contradicción: la hipótesis de dos raíces es falsa. **La raíz es única**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** La unicidad exige probar formalmente que f'(x) ≠ 0 en todo ■ por Rolle o monotonía estricta. Decir 'es evidente que solo corta una vez' no puntúa.

PROBLEMA 6: PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN EN CONTEXTO REAL

Enunciado Oficial: *Se fabrica un envase cilíndrico cerrado de hojalata con volumen fijo de 500 cm³. Halle el radio r y la altura h para minimizar la cantidad de hojalata.*

1. Ecuación de ligadura: $V = \pi r^2 h = 500 \rightarrow \mathbf{h = 500 / (\pi r^2)}$ (con $r > 0$).

2. Función objetivo a minimizar (Área total):
$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r (500 / \pi r^2) = \mathbf{2\pi r^2 + 1000/r}$.

3. Puntos críticos (S'(r) = 0):
$S'(r) = 4\pi r - 1000/r^2 = 0 \rightarrow 4\pi r^3 = 1000 \rightarrow r^3 = 250/\pi \rightarrow \mathbf{r = \sqrt[3]{250/\pi}} \approx \mathbf{4{,}30\ cm}$.

4. Justificación del mínimo (Segunda derivada):
$S''(r) = 4\pi + 2000/r^3$. Para $r = \sqrt[3]{250/\pi} > 0$: $S''(r) = 4\pi + 8\pi = \mathbf{12\pi > 0 \rightarrow M\acute{I}NIMO\ CONFIRMADO}$.

5. Dimensiones óptimas:
$h = 500 / [\pi (250/\pi)^{(2/3)}] = 2\sqrt[3]{250/\pi} = \mathbf{2r} \approx \mathbf{8{,}60\ cm}$ (cilindro equilátero: altura = diámetro).

La Trampa de la Ponencia: Justificar obligatoriamente que el punto crítico es un mínimo mediante $S''(r) > 0$. Omitir la comprobación resta 0,75 puntos.

PROBLEMA 7: INTEGRACIÓN POR PARTES (FÓRMULA ALPES)

Enunciado Oficial: *Calcule las integrales indefinidas: a) $I = \int (2x + 1) e^{3x}\, dx$. b) $I = \int x^2 \ln(x)\, dx$.*

a) Cálculo de $I = \int (2x + 1) e^{3x}\, dx$ (Polinomio × Exponencial):
$u = 2x + 1 \rightarrow du = 2\, dx$ • $dv = e^{3x}\, dx \rightarrow v = (1/3) e^{3x}$.
$I = (2x + 1) \cdot (1/3) e^{3x} - \int (1/3) e^{3x} \cdot 2\, dx = (2x+1)/3\, e^{3x} - (2/9) e^{3x} + C$.
$\mathbf{I = [(6x + 1)/9] e^{3x} + C}$.

b) Cálculo de $I = \int x^2 \ln(x)\, dx$ (Logarítmica × Polinomio):
Por regla ALPES elegimos $u = \ln(x) \rightarrow du = (1/x)\, dx$ • $dv = x^2\, dx \rightarrow v = x^3/3$.
$I = (x^3/3) \ln(x) - \int (x^3/3) (1/x)\, dx = (x^3/3) \ln(x) - (1/3) \int x^2\, dx$.
$\mathbf{I = (x^3/3) \ln(x) - x^3/9 + C = (x^3/9) [3 \ln(x) - 1] + C}$.

La Trampa de la Ponencia: En integrales con logaritmos, la función logarítmica SIEMPRE es u (ALPES). Asignar dv = ln(x) dx estanca la resolución.

PROBLEMA 8: INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES (FRACCIONES SIMPLES)

Enunciado Oficial: *Calcule la integral indefinida: $I = \int [(x^2 + 3x - 2) / (x^3 - x)]\, dx$.*

1. Factorización del denominador: $x^3 - x = x(x^2 - 1) =$ **$x(x - 1)(x + 1)$** (tres raíces simples: 0, 1, -1).

2. Descomposición en fracciones simples:
$(x^2 + 3x - 2) / [x(x-1)(x+1)] = A/x + B/(x-1) + C/(x+1)$.
$x^2 + 3x - 2 = A(x - 1)(x + 1) + B\,x(x + 1) + C\,x(x - 1)$.
• Para x = 0: $-2 = -A$ ➔ **A = 2**.
• Para x = 1: $1 + 3 - 2 = 2B$ ➔ **B = 1**.
• Para x = -1: $1 - 3 - 2 = 2C$ ➔ $-4 = 2C$ ➔ **C = -2**.

3. Integración término a término:
$I = \int [2/x + 1/(x-1) - 2/(x+1)]\, dx = 2\ln|x| + \ln|x - 1| - 2\ln|x + 1| + C$.
$I = \ln| [x^2 (x - 1)] / (x + 1)^2 | + C$.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Es preceptivo colocar el valor absoluto en los logaritmos (ln|x|), pues los argumentos deben ser no negativos.

PROBLEMA 9: CÁLCULO DE ÁREAS ENTRE CURVAS (REGLA DE BARROW)

Enunciado Oficial: *Calcule el área del recinto plano limitado por las curvas $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 2x$.*

1. Puntos de corte entre las parábolas:
$f(x) = g(x)$ ➔ $-x^2 + 4x = x^2 - 2x$ ➔ $2x^2 - 6x = 0$ ➔ $2x(x - 3) = 0$ ➔ **x = 0** y **x = 3**.

2. Determinación de la función superior en (0, 3):
Evaluamos en x = 1: $f(1) = 3$ y $g(1) = -1$ ➔ $f(x) > g(x)$ (la parábola f queda por encima).

3. Integral y Regla de Barrow:
Área = $\int_{■}^{■^3} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{■}^{■^3} (-2x^2 + 6x)\, dx$.
Primitiva $F(x) = -2x^3/3 + 3x^2$.
$F(3) = -2(27)/3 + 3(9) = -18 + 27 = 9$ • $F(0) = 0$.
Área = F(3) - F(0) = 9 u².

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Comprobar qué función está por encima para evitar áreas negativas. Especificar siempre las unidades cuadradas (u^2).

PROBLEMA 10: INTEGRALES CON PARÁMETROS Y TEOREMA FUNDAMENTAL

Enunciado Oficial: *Sea F(x) = ∫■■ (t² - 4) e^(2t) dt. a) Halle F'(x) y sus extremos. b) Halle k > 0 para que el área bajo y = k x² en [0, 2] sea 16 u².*

a) Teorema Fundamental del Cálculo y extremos de F(x):
Por ser el integrando continuo: **F'(x) = (x² - 4) e^(2x)**.
Puntos críticos (F'(x) = 0): Como e^(2x) > 0, x² - 4 = 0 ➔ **x = -2** y **x = 2**.
• En x = -2: F' pasa de + a - ➔ **Máximo relativo**.
• En x = 2: F' pasa de - a + ➔ **Mínimo relativo**.

b) Cálculo de k > 0 con área de 16 u²:
Área = ∫■² k x² dx = [k x³/3]■² = 8k/3 = 16 ➔ 8k = 48 ➔ **k = 6**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Para derivar ∫■■ f(t)dt no se integra: se aplica directamente el Teorema Fundamental del Cálculo (F'(x) = f(x)).

CONCEPTO DE ANÁLISIS	FÓRMULA / CONDICIÓN	CRITERIO DE EXAMEN
Continuidad en Empalme	lim(x→x■■) = lim(x→x■■) = f(x■)	Condición previa para ser derivable
Teorema de Bolzano	f continua en [a,b] y f(a)·f(b) < 0	Garantiza existencia en (a,b)
Unicidad con Rolle	f'(x) ≠ 0 en todo el intervalo	Demostración por reducción al absurdo
Integración por Partes	∫ u dv = u·v - ∫ v du	Prioridad ALPES para asignar u
Regla de Barrow	Área = ∫■■ |f(x) - g(x)| dx	Unidades de superficie explícitas (u²)

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA Y CRITERIOS OFICIALES: D. JOSÉ GARCÉS ÁVILA
Ingeniero Mecánico • Director Pedagógico de Academia MJ.
Preparación presencial de grupos reducidos en Santa Fe (Granada) e intensivos PAU Andalucía.
Canal Oficial de WhatsApp: +34 679 71 06 64 • Web: academia-santafe.es