Física: 10 Problemas Resueltos Paso a Paso Campo Gravitatorio, Órbitas y Leyes de Kepler

Cuadernillo Técnico Oficial de Examen • Formato Imprimible A4
Elaborado y supervisado pedagógicamente por: **D. José Garcés Ávila** (Ingeniero Mecánico • Director Pedagógico de Academia MJ)
Canal de Dudas y Clases de Preparación: WhatsApp **+34 679 71 06 64** • academia-santafe.es

EJERCICIO OFICIAL #1: SATÉLITE EN ÓRBITA CIRCULAR Y TRABAJO DE CAMBIO DE ÓRBITA

Enunciado: *Un satélite artificial de masa m = 1200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura h■ = 600 km sobre la superficie. Calcule: a) Su velocidad orbital y el periodo de revolución. b) El trabajo mínimo necesario para transferirlo a una órbita más alta a h■ = 1200 km. (Datos: G = 6,67·10■¹¹ N·m²/kg²; M_T = 5,97·10²■ kg; R_T = 6370 km).*

Resolución Oficial Paso a Paso:

a) Radio de la primera órbita: r■ = R_T + h■ = 6370·10³ + 600·10³ = 6,97·10■ m.
Deducción obligatoria de la velocidad orbital: En órbita circular, la fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta:
F_g = F_c ➔ G·M_T·m / r■² = m·v■² / r■ ➔ **v■ = √(G·M_T / r■)**
v■ = √[(6,67·10■¹¹ · 5,97·10²■) / (6,97·10■)] = **7557,2 m/s**.
Periodo: T■ = 2πr■ / v■ = (2·π·6,97·10■) / 7557,2 = **5794,8 s (≈ 96,6 minutos)**.

b) Trabajo de transferencia: Por el teorema de las fuerzas vivas en campo conservativo:
W = ΔE_m = E_m2 - E_m1. Como la energía mecánica en órbita circular es **E_m = -½ · (G·M_T·m / r)**:
W = -½ G·M_T·m · (1/r■ - 1/r■) = ½ G·M_T·m · (1/r■ - 1/r■).
r■ = R_T + h■ = 6370·10³ + 1200·10³ = 7,57·10■ m.
W = ½ (6,67·10■¹¹ · 5,97·10²■ · 1200) · (1/6,97·10■ - 1/7,57·10■) = **+2,72·10■ J**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** ¡Prohibido poner v = √(GM/r) de memoria sin igualar F_g = F_c! Los correctores andaluces descuentan 0,5 puntos por no deducirla. Además, el radio de órbita es SIEMPRE r = R_T + h; usar r = h anula todo el ejercicio.

EJERCICIO OFICIAL #2: SATÉLITE GEOESTACIONARIO: ALTURA Y ENERGÍA MECÁNICA

Enunciado: *Calcule a qué altura sobre el ecuador terrestre debe situarse un satélite de telecomunicaciones de masa m = 800 kg para que sea geoestacionario. Calcule asimismo su energía mecánica total en dicha órbita. (Datos: G = 6,67·10⁻¹¹ N·m²/kg²; M_T = 5,97·10²⁴ kg; R_T = 6370 km).*

Resolución Oficial Paso a Paso:

Condición de satélite geoestacionario: Gira en el plano ecuatorial con el mismo periodo de rotación de la Tierra: **T = 24 h = 86400 s**.
Deducción analítica: Igualando F_g = F_c con v = 2πr/T:
G·M_T·m / r² = m · (4π²r / T²) ➔ **r³ = (G·M_T·T²) / (4π²)** (Tercera Ley de Kepler).
r = ∛[(6,67·10⁻¹¹ · 5,97·10²⁴ · 86400²) / (4π²)] = **4,22·10⁷ m (42200 km desde el centro)**.
Altura sobre la superficie: h = r - R_T = 42200 - 6370 = **35830 km**.

Energía mecánica total:
E_m = -½ · (G·M_T·m / r) = -½ · (6,67·10⁻¹¹ · 5,97·10²⁴ · 800) / (4,22·10⁷) = **-3,77·10¹⁰ J**.

La Trampa de la Ponencia: El signo MENOS en la energía mecánica es innegociable. Si omites el signo negativo, el corrector interpreta que el sistema no está ligado y te pondrá un 0 en el apartado b.

EJERCICIO OFICIAL #3: DEDUCCIÓN DE LA VELOCIDAD DE ESCAPE Y ESCAPE DESDE ÓRBITA

Enunciado: *a) Deduzca razonadamente, aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, la expresión de la velocidad de escape desde la superficie de un planeta de masa M y radio R. b) Calcule la velocidad de escape que necesitaría un satélite que ya orbita a una altura h = R_T respecto a la velocidad de escape desde la superficie.*

Resolución Oficial Paso a Paso:

a) Deducción desde la superficie: La velocidad de escape es la velocidad mínima que debe comunicarse a un cuerpo para que llegue al infinito con energía cinética nula (E_mf = 0).
E_mi = E_mf ➔ E_c(superficie) + E_p(superficie) = 0
½ m v_esc² - G·M·m / R = 0 ➔ ½ v_esc² = G·M / R ➔ **v_esc = √(2GM / R)**.

b) Escape desde una órbita a r = R_T + h = 2R_T:
E_m(órbita) = -½ G·M·m / (2R_T) = -G·M·m / (4R_T).
Para escapar desde esa órbita communicating una velocidad adicional v':
E_mi + E_c(extra) = 0 ➔ -G·M·m / (4R_T) + ½ m v'² = 0 ➔ v' = √(G·M / 2R_T) = **½ v_esc(superficie)**.
El satélite requiere la mitad de la velocidad de escape de superficie.

La Trampa de la Ponencia: No confundir la velocidad orbital v_orb = √(GM/r) con la de escape v_esc = √(2GM/r). La relación exacta es v_esc = √2 · v_orb (un 41,4% superior a la velocidad de órbita).

EJERCICIO OFICIAL #4: TERCERA LEY DE KEPLER Y DETERMINACIÓN DE LA MASA DE JÚPITER

Enunciado: *El satélite galileano Ío describe una órbita circular en torno a Júpiter con un radio de 4,22·10■ m y un periodo de revolución de 1,77 días terrestres. a) Deduzca la Tercera Ley de Kepler a partir de la Ley de Gravitación Universal. b) Calcule la masa de Júpiter a partir de los datos orbitales de Ío. (Dato: G = 6,67·10■¹¹ N·m²/kg²).*

Resolución Oficial Paso a Paso:

a) Deducción de la 3ª Ley de Kepler:
$F_g = F_c \rightarrow G \cdot M_J \cdot m / r^2 = m \cdot v^2 / r$. Como el movimiento es uniforme, $v = 2\pi r / T$:
$G \cdot M_J / r = 4\pi^2 r^2 / T^2 \rightarrow \mathbf{T^2 = (4\pi^2 / G \cdot M_J) \cdot r^3}$. Como $(4\pi^2/GM_J)$ es constante para todos los satélites de Júpiter, $T^2 \propto r^3$ (3ª Ley de Kepler).

b) Cálculo de la masa de Júpiter (M_J):
Conversión del periodo al S.I.: T = 1,77 días · 86400 s/día = **1,529·10■ s**.
Despejando M_J: $\mathbf{M_J = (4\pi^2 \cdot r^3) / (G \cdot T^2)}$
$M_J = [4 \cdot \pi^2 \cdot (4{,}22 \cdot 10■)^3] / [6{,}67 \cdot 10■^{11} \cdot (1{,}529 \cdot 10■)^2] =$ **1,90·10²■ kg** (unas 318 veces la masa de la Tierra).

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Si dejas el periodo en días (1,77) o en horas, la constante G (que viene en segundos) provocará un error de 10 órdenes de magnitud. ¡Conversión a segundos obligatoria antes de sustituir!

EJERCICIO OFICIAL #5: PUNTO DE INEQUIGRAVEDAD TIERRA-LUNA: CAMPO VS POTENCIAL

Enunciado: *La distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es d = 3,84·10■ m. Sabiendo que la masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna (M_T = 81 M_L): a) Calcule a qué distancia del centro de la Tierra se anula el campo gravitatorio total. b) ¿Se anula también el potencial gravitatorio en dicho punto? Justifique rigurosamente.*

Resolución Oficial Paso a Paso:

a) Anulación del campo gravitatorio total: Sea x la distancia desde el centro de la Tierra.
En el punto de anulación, las intensidades de campo tienen el mismo módulo y sentidos opuestos:
$g_T = g_L \rightarrow G \cdot M_T / x^2 = G \cdot M_L / (d - x)^2$
Sustituyendo $M_T = 81\ M_L$: $81 / x^2 = 1 / (d - x)^2 \rightarrow$ Tomando raíz cuadrada en ambos miembros:
$9 / x = 1 / (d - x) \rightarrow 9(d - x) = x \rightarrow 9d = 10x \rightarrow$ **x = 0,9 d = 3,456·10■ m** desde el centro de la Tierra.

b) Justificación sobre el potencial gravitatorio:
NO, el potencial NUNCA se anula en ese punto.
El campo gravitatorio es una magnitud vectorial y puede anularse por cancelación de vectores opuestos. Sin embargo, el potencial gravitatorio es una **magnitud escalar estrictamente negativa** generada por masas:
$V_{total} = V_T + V_L = -G \cdot M_T / x - G \cdot M_L / (d - x) < 0$.
Al ser la suma de dos términos negativos, el potencial total es negativo y solo se anula en el infinito ($r \rightarrow \infty$).

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Confundir magnitud vectorial (campo) con magnitud escalar (potencial). La explicación cualitativa del apartado b vale 1 punto íntegro en Selectividad y suele ser la criba de las mejores notas.

EJERCICIO OFICIAL #6: ENERGÍA DE SATELIZACIÒN DESDE LA SUPERFICIE TERRESTRE

Enunciado: *Calcule la energía mecánica mínima necesaria que debe suministrarse a un satélite de 500 kg situado en reposo sobre la superficie de la Tierra para situarlo en una órbita circular a una altura h = 800 km. (Datos: G = 6,67·10■¹¹ N·m²/kg²; M_T = 5,97·10²■ kg; R_T = 6370 km).*

Resolución Oficial Paso a Paso:

Principio fundamental: La energía de satelización es la diferencia entre la energía mecánica final en órbita y la energía mecánica inicial en reposo en la superficie:
E_sat = E_mf(órbita) - E_mi(superficie).
Estado inicial (superficie en reposo): E_mi = E_c + E_p = 0 - G·M_T·m / R_T.
Estado final (en órbita r = R_T + h): E_mf = -½ G·M_T·m / r.
E_sat = -½ G·M_T·m / r - (-G·M_T·m / R_T) = **G·M_T·m · [1/R_T - 1/(2r)]**.
r = 6370·10³ + 800·10³ = 7,17·10■ m.
E_sat = (6,67·10■¹¹ · 5,97·10²■ · 500) · [1/(6,37·10■) - 1/(2·7,17·10■)]
E_sat = 1,991·10¹■ · [1,5698·10■■ - 0,6973·10■■] = **+1,74·10¹■ J (17,4 GJ)**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** El fallo más común es calcular solo la energía cinética orbital ½mv². Se debe vencer la atracción gravitatoria (aumentar la energía potencial) MÁS dotar al satélite de velocidad cinética orbital.

EJERCICIO OFICIAL #7: VARIACIÓN DE LA GRAVEDAD CON LA ALTURA Y COMPARACIÓN

Enunciado: *a) Deduzca cómo varía la aceleración de la gravedad g con la altura h sobre la superficie terrestre. b) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra el valor de g se reduce a la cuarta parte (25%) de su valor en la superficie? Exprese el resultado en kilómetros y en función del radio terrestre R_T = 6370 km.*

Resolución Oficial Paso a Paso:

a) Deducción matemática: En la superficie: g■ = G·M_T / R_T².
A una altura h: g(h) = G·M_T / (R_T + h)².
Dividiendo ambas ecuaciones: **g(h) / g■ = [R_T / (R_T + h)]² ➔ g(h) = g■ · [R_T / (R_T + h)]²**.

b) Cálculo de la altura para g = 0,25 g■:
g(h) = g■ / 4 ➔ [R_T / (R_T + h)]² = 1/4 ➔ Tomando raíz cuadrada:
R_T / (R_T + h) = 1/2 ➔ 2 R_T = R_T + h ➔ **h = R_T**.
La altura requerida es exactamente igual a un radio terrestre: **h = 6370 km**.

■■ **La Trampa de la Ponencia:** Al pedir la altura h 'sobre la superficie', muchos alumnos responden r = 2 R_T. Recuerda que r es la distancia al centro de la Tierra; la altura sobre la superficie es h = r - R_T = R_T.

EJERCICIO OFICIAL #8: PLANETA FICTICIO: DENSIDAD Y GRAVEDAD EN SUPERFICIE

Enunciado: *Un exoplaneta rocoso tiene una densidad media doble que la de la Tierra ($\rho_p = 2\,\rho_T$) y su radio es la mitad que el radio terrestre ($R_p = ½\,R_T$). a) Calcule la aceleración de la gravedad en la superficie de este planeta en función de la terrestre g_0. b) Si un astronauta tiene una masa de 75 kg, ¿cuál será su masa y su peso en dicho planeta? ($g_0 = 9{,}8\ m/s^2$).*

Resolución Oficial Paso a Paso:

a) Expresión de g en función de la densidad:
$M = \rho \cdot \text{Volumen} = \rho \cdot (4/3\ \pi R^3)$ ➔ Sustituyendo en $g = G \cdot M / R^2$:
$g = G \cdot [\ \rho \cdot (4/3\ \pi R^3)\ ] / R^2$ ➔ **$g = 4/3\ \pi\ G \cdot \rho \cdot R$**.
Para el exoplaneta: $g_p = 4/3\ \pi\ G \cdot (2\,\rho_T) \cdot (½\,R_T) = 4/3\ \pi\ G \cdot \rho_T \cdot R_T =$ **$g_0 = 9{,}8\ m/s^2$**.
La gravedad en la superficie del exoplaneta es idéntica a la terrestre.

b) Masa y peso del astronauta:
• **Masa:** Es una propiedad intrínseca de la materia independiente del lugar: **m = 75 kg**.
• **Peso:** $P = m \cdot g_p = 75\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 =$ **735 N**.

La Trampa de la Ponencia: Decir que 'la masa cambia en el espacio'. La masa NUNCA cambia (75 kg en la Tierra, en la Luna y en Júpiter). Lo que cambia es el peso, que es la fuerza gravitatoria P = m·g.

EJERCICIO OFICIAL #9: LA 'PARADOJA DEL SATÉLITE': ROZAMIENTO ATMOSFÉRICO Y VELOCIDAD

Enunciado: *Un satélite de 1500 kg que orbita la Tierra a 700 km experimenta una débil fuerza de rozamiento con las capas altas de la atmósfera, lo que provoca que descienda lentamente a una órbita circular de 650 km. Razone cualitativamente y calcule cuantitativamente: a) La variación de la energía potencial, cinética y mecánica. b) Justifique por qué la velocidad orbital aumenta a pesar de que el rozamiento frena al satélite.*

Resolución Oficial Paso a Paso:

a) Análisis analítico de energías: $r_0 = 6370 + 700 = 7{,}07 \cdot 10^0\ m$; $r_0 = 6370 + 650 = 7{,}02 \cdot 10^0\ m$.
• **Energía Mecánica:** $E_m = -½\ G \cdot M_T \cdot m / r$. Al disminuir r, E_m se hace más negativa ➔ **$\Delta E_m < 0$ (disminuye)**. Se disipa calor.
• **Energía Potencial:** $E_p = -G \cdot M_T \cdot m / r$. Al descender, **$\Delta E_p < 0$ (disminuye el doble que E_m)**.
• **Energía Cinética:** $E_c = +½\ G \cdot M_T \cdot m / r$. Al ser r menor, **$\Delta E_c > 0$ (aumenta)**.

b) Explicación de la Paradoja:
Como $v = \sqrt{(GM_T / r)}$, al reducirse el radio orbital por la pérdida de altitud, la velocidad orbital obligatoriamente AUMENTA. La pérdida de energía potencial gravitatoria es el doble de la energía mecánica disipada por rozamiento; la mitad restante se transforma en energía cinética acelerando al satélite.

La Trampa de la Ponencia: Responder que 'si hay rozamiento, la velocidad disminuye'. En dinámica orbital, el rozamiento hace caer al satélite a una órbita más baja donde la gravedad lo hace girar MÁS RÁPIDO.

EJERCICIO OFICIAL #10: CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR Y LEY DE LAS ÁREAS EN ÓRBITA ELÍPTICA

Enunciado: *Un asteroide describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Su distancia mínima al Sol (perihelio) es $r_p = 1{,}2 \cdot 10^{11}$ m y su velocidad en ese punto es $v_p = 35$ km/s. Si en el afelio su distancia es $r_a = 2{,}8 \cdot 10^{11}$ m: a) Justifique qué magnitudes dinámicas se conservan durante el movimiento. b) Calcule la velocidad del asteroide en el afelio.*

Resolución Oficial Paso a Paso:

a) Magnitudes que se conservan:

1. **Momento Angular (L):** La fuerza gravitatoria es una **fuerza central** (su recta de acción pasa por el Sol, centro de fuerzas). Por tanto, el momento de la fuerza es nulo: τ **= r × F = 0**. Por el teorema del momento angular, $dL/dt = \tau = 0$ ➔ **L = cte (vector constante)**.
2. **Energía Mecánica (E_m):** La fuerza gravitatoria es una **fuerza conservativa**, por lo que $E_m = E_c + E_p$ = cte.

b) Velocidad en el afelio (v_a):

En el perihelio y en el afelio, el vector de posición r es perpendicular a la velocidad v (sen 90° = 1):

$L_p = L_a$ ➔ $m \cdot r_p \cdot v_p = m \cdot r_a \cdot v_a$ ➔ **$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$**

$v_a = (r_p \cdot v_p) / r_a = (1{,}2 \cdot 10^{11} \cdot 35000) / (2{,}8 \cdot 10^{11})$ = **15000 m/s (15 km/s)**.

En el afelio, al estar más alejado, su velocidad es notablemente menor (Segunda Ley de Kepler).

■■ **La Trampa de la Ponencia:** No justificar por qué se conserva el momento angular. Hay que escribir explícitamente: 'Fuerza central implica momento de fuerza nulo ($\tau = 0$), por lo que L permanece constante'.