ACADEMIA MJ · CENTRO DE ESTUDIOS ESPECIALIZADO

Ficha de Trabajo: Vector Unitario (2D y 3D)

Teoría, Protocolo de Normalización, Fórmulas de Racionalización y 20 Ejercicios Resueltos Paso a Paso.

1. ¿Qué es un Vector Unitario y Para Qué Sirve?

En matemáticas y física, un **vector unitario** (o *versor*) es aquel cuya longitud o **módulo es exactamente igual a 1** (|u| = 1). No tiene dimensiones físicas; su objetivo exclusivo es **marcar una dirección y un sentido** en el plano o en el espacio.

Propiedad	Expresión Matemática	Significado Físico / Didáctico
Módulo Unitario	`|u| = 1`	Su longitud euclídea siempre equivale a la unidad.
Fórmula de Normalización	`u = v / |v|`	Divide cada coordenada x, y, z entre la norma total.
Versores Canónicos 2D	`i = (1, 0)` `j = (0, 1)`	Direcciones fijas sobre los ejes cartesianos X e Y.
Versor Canónico Eje Z	`k = (0, 0, 1)`	Base ortonormal en el espacio tridimensional 3D.

2. Protocolo de Normalización en 3 Pasos

Paso 1: Módulo (|v|)	Calcula el módulo por Pitágoras: **|v| = √(v□² + v□² + v□²)**. *Regla de oro:* Cualquier componente negativa al cuadrado es positiva: (-4)² = +16.
Paso 2: División y Racionalización	Divide cada componente entre el módulo: **u = (v□/|v| , v□/|v| , v□/|v|)**. Si la raíz no es exacta, simplifica y racionaliza (ej: 1/√2 = √2/2).
Paso 3: Comprobación (|u| = 1)	Comprueba el resultado elevando al cuadrado sus componentes: **√(u□² + u□² + u□²) = 1**. Si no da 1, revisa los signos.

3. Batería Completa de 20 Ejercicios Resueltos Paso a Paso

Bloque A: Vectores en el Plano 2D con Módulo Entero

Ejercicio 1: Normalizar v = (3, 4)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(3² + 4²) = √(9 + 16) = √25 = 5

Paso 2 (Normalización): u = (3/5 , 4/5) = (0.6 , 0.8) | Comprobación: √(0.36 + 0.64) = √1 = 1

Resultado: u = (3/5 , 4/5)

Ejercicio 2: Normalizar v = (6, 8)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(6² + 8²) = √(36 + 64) = √100 = 10

Paso 2 (Normalización): u = (6/10 , 8/10) □ Simplificando fracciones dividiendo entre 2

Resultado: u = (3/5 , 4/5) (Misma dirección y sentido que el Ejercicio 1)

Ejercicio 3: Normalizar v = (5, 12)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(5² + 12²) = √(25 + 144) = √169 = 13

Paso 2 (Normalización): u = (5/13 , 12/13) | Comprobación: √(25/169 + 144/169) = √(169/169) = 1

Resultado: u = (5/13 , 12/13)

Ejercicio 4: Normalizar v = (8, -15)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(8² + (-15)²) = √(64 + 225) = √289 = 17

Paso 2 (Normalización): u = (8/17 , -15/17) (Se respeta rigurosamente el signo negativo)

Resultado: u = (8/17 , -15/17)

Ejercicio 5: Normalizar v = (-7, 24)

Paso 1 (Módulo): |v| = √((-7)² + 24²) = √(49 + 576) = √625 = 25

Paso 2 (Normalización): u = (-7/25 , 24/25) | Comprobación: √(49/625 + 576/625) = 1

Resultado: u = (-7/25 , 24/25)

Bloque B: Vectores 2D con Raíces y Racionalización

Ejercicio 6: Normalizar v = (1, 1)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(1² + 1²) = √2

Paso 2 (Normalización): u = (1/√2 , 1/√2) □ Racionalizando: (1·√2 / (√2·√2) , 1·√2 / (√2·√2))

Resultado: u = (√2/2 , √2/2)

Ejercicio 7: Normalizar v = (2, -3)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(2² + (-3)²) = √(4 + 9) = √13

Paso 2 (Normalización): u = (2/√13 , -3/√13) □ Racionalizando multiplicando por √13

Resultado: u = (2√13/13 , -3√13/13)

Ejercicio 8: Normalizar v = (-4, -2)

Paso 1 (Módulo): |v| = √((-4)² + (-2)²) = √(16 + 4) = √20 = 2√5

Paso 2 (Normalización): u = (-4/(2√5) , -2/(2√5)) = (-2/√5 , -1/√5) □ Racionalizando por √5

Resultado: u = (-2√5/5 , -√5/5)

Ejercicio 9: Vector unitario en sentido OPUESTO a v = (3, -1)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(3² + (-1)²) = √10. Vector opuesto: -v = (-3, 1)

Paso 2 (Normalización): u_opuesto = -v / |v| = (-3/√10 , 1/√10)

Resultado: u = (-3√10/10 , √10/10)

Ejercicio 10: Demostrar si w = (1/2 , √3/2) es unitario

Paso 1 (Módulo): |w| = √((1/2)² + (√3/2)²) = √(1/4 + 3/4) = √(4/4) = √1 = 1

Paso 2 (Normalización): El módulo es exactamente 1. Cumple la condición de versor.

Resultado: ¡Sí es unitario! (|w| = 1)

Bloque C: Vectores en el Espacio Tridimensional 3D

Ejercicio 11: Normalizar en 3D el vector v = (1, 2, 2)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(1² + 2² + 2²) = √(1 + 4 + 4) = √9 = 3

Paso 2 (Normalización): u = (1/3 , 2/3 , 2/3) | Comprobación: √(1/9 + 4/9 + 4/9) = √(9/9) = 1

Resultado: u = (1/3 , 2/3 , 2/3)

Ejercicio 12: Normalizar el vector v = (2, -3, 6)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(2² + (-3)² + 6²) = √(4 + 9 + 36) = √49 = 7

Paso 2 (Normalización): u = (2/7 , -3/7 , 6/7) | Comprobación: √(4/49 + 9/49 + 36/49) = 1

Resultado: u = (2/7 , -3/7 , 6/7)

Ejercicio 13: Normalizar el vector v = (1, 1, 1)

Paso 1 (Módulo): |v| = √(1² + 1² + 1²) = √3

Paso 2 (Normalización): u = (1/√3 , 1/√3 , 1/√3) □ Racionalizando multiplicando por √3

Resultado: u = (√3/3 , √3/3 , √3/3)

Ejercicio 14: Normalizar el vector v = (-1, 4, -8)

Paso 1 (Módulo): |v| = √((-1)² + 4² + (-8)²) = √(1 + 16 + 64) = √81 = 9

Paso 2 (Normalización): u = (-1/9 , 4/9 , -8/9)

Resultado: u = (-1/9 , 4/9 , -8/9)

Ejercicio 15: Vector unitario de A(1, 2, 0) a B(4, 6, 0)

Paso 1 (Módulo): Vector AB = B - A = (4-1 , 6-2 , 0-0) = (3, 4, 0). Módulo: √(9+16+0) = 5

Paso 2 (Normalización): u_AB = (3/5 , 4/5 , 0/5) = (3/5 , 4/5 , 0)

Resultado: u = (3/5 , 4/5 , 0)

Bloque D: Problemas de Selectividad / PAU y Bachillerato

Ejercicio 16: Hallar 'k' para que v = (k, 3/5) sea unitario

Paso 1 (Módulo): Condición: |v| = 1 □ √(k² + (3/5)²) = 1 □ k² + 9/25 = 1

Paso 2 (Normalización): k² = 1 - 9/25 = 16/25 □ k = ±√(16/25) = ± 4/5

Resultado: Dos soluciones: k = 4/5 y k = -4/5

Ejercicio 17: Hallar un vector de módulo 10 con la dirección de v = (3, -4)

Paso 1 (Módulo): Unitario de v: |v| = 5 □ u = (3/5 , -4/5)

Paso 2 (Normalización): Vector de módulo 10: w = 10 · u = 10 · (3/5 , -4/5) = (30/5 , -40/5)

Resultado: w = (6 , -8)

Ejercicio 18: Vectores unitarios perpendiculares a v = (4, 3)

Paso 1 (Módulo): Perpendicular: p = (-3, 4). Su módulo es √(9 + 16) = 5

Paso 2 (Normalización): Unitario directo: u□ = (-3/5, 4/5). Unitario sentido opuesto: u□ = (3/5, -4/5)

Resultado: u□ = (-3/5 , 4/5) y u□ = (3/5 , -4/5)

Ejercicio 19: Comprobar si u = (1/√2, 1/√2) y w = (-1/√2, 1/√2) son ortonormales

Paso 1 (Módulo): 1) Módulos: |u| = √(1/2 + 1/2) = 1; |w| = √(1/2 + 1/2) = 1 (Unitarios)

Paso 2 (Normalización): 2) Ortogonalidad (Producto escalar): u · w = (1/√2)(-1/√2) + (1/√2)(1/√2) = -1/2 + 1/2 = 0

Resultado: ¡Sí son ortonormales! (Módulo 1 y perpendiculares entre sí)

Ejercicio 20: Vector unitario normal al plano formado por i = (1, 0, 0) y j = (0, 1, 0)

Paso 1 (Módulo): Producto vectorial: n = i × j = (0·0-0·1 , 0·0-1·0 , 1·1-0·0) = (0 , 0 , 1)

Paso 2 (Normalización): Módulo: |n| = √(0 + 0 + 1) = 1. Coincide con el versor canónico k del eje Z.

Resultado: Versores normales: k = (0 , 0 , 1) y -k = (0 , 0 , -1)

4. Los 4 Errores Fatales en Exámenes (Criterio PAU)

□ **Error 1: Signos dentro del cuadrado**	Escribir -3² = -9. Todo número real al cuadrado es estrictamente positivo: (-3)² = +9. Bajo la raíz jamás puede quedar un signo negativo restando.
□ **Error 2: Confundir con vector nulo**	El vector nulo (0,0,0) tiene módulo 0 y carece de dirección. La operación v/0 es una indeterminación matemática: no se puede normalizar.
□ **Error 3: Cambiar el sentido**	Si v = (-2, 5), su versor u = (-2/√29, 5/√29) debe conservar los mismos signos para mantener el sentido original del vector.
□ **Error 4: No racionalizar**	En Bachillerato entregar 1/√2 suele restar puntuación. Multiplica siempre numerador y denominador por la raíz: √2/2.

Material elaborado y supervisado por José Garcés Ávila
Director Pedagógico de Academia MJ (Santa Fe, Granada). Clases de apoyo escolar, Bachillerato y preparación intensiva para Selectividad (PAU). Consultas y matrículas por WhatsApp al **+34 679 71 06 64** o en **www.academia-santafe.es**.